Sensibilité de la prime d'une option à la variation des paramètres de la formule de Black & Scholes

Olivier Levyne (2007)
Docteur en Sciences Economiques
HDR en Sciences de Gestion

Les dérivées partielles de la formule de Black and Scholes expriment la sensibilité de la prime d'une option aux petites variations des principaux paramètres : cours du sous-jacent, volatilité, temps restant jusqu'à l'échéance, taux d'intérêt sans risque.

Elles permettent de déterminer des indicateurs utilisés dans le cadre de la couverture d'un portefeuille d'actions sous-jacentes.

1. Delta : formule et principe de couverture

Soit Δ = delta du call = $\frac{\partial C}{\partial S}$

avec :

∂C = variation de la prime du call

∂S = variation du cours de l'action sous-jacente.

D'après la formule de Black and Scholes :

$$C = S\Phi(d_1) - Ee^{-r\tau}\Phi(d_2) \text{ avec } d_1 = \frac{\ln\frac{S}{E} + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \text{ et } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

Il est habituel de noter : $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ = f'(x). Donc ici :

$\frac{\partial C(S)}{\partial S}$ = C'(S) = dérivée de C par rapport à S

$$\text{Par ailleurs : } d_1 = \frac{\ln\frac{S}{E} + r\tau + \frac{\sigma^2\tau}{2}}{\sigma\sqrt{\tau}} = \frac{\ln\frac{S}{E} + \ln e^{r\tau} + \frac{\sigma^2\tau}{2}}{\sigma\sqrt{\tau}} = \frac{\ln\frac{S}{Ee^{r\tau}} + \frac{\sigma^2\tau}{2}}{\sigma\sqrt{\tau}} = \frac{\ln\frac{S}{(Ee^{-r\tau})} + \frac{\sigma^2\tau}{2}}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$\text{Donc } d_1 = \frac{\ln S - \ln Ee^{-r\tau} + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$\Delta = C'(S) = [S\Phi(d_1) - Ee^{-r\tau}\Phi(d_2)]' = 1.\Phi[d_1(S)] + S\{\Phi[d_1(S)]\}' - Ee^{-r\tau}\{\Phi[d_2(S)]\}'$$

dans la mesure où :

$\{u[v(x)]\}' = u'[v(x)].\ v'(x).$

En outre, si $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ alors $\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} = f(x)$

Dès lors :

$\Delta = \Phi(d_1) + S.f[d_1(S)].d'_1(S) - Ee^{-r\tau}.f[d_2(S)].d'_2(S).$

Or : $d_2(S) = d_1(S) - \sigma\sqrt{\tau}$ alors, $d'_2(S) = d'_1(S)$

Et :

$$f(d_2) = f(d_1 - \sigma\sqrt{\tau}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(d_1-\sigma\sqrt{t})^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}+d_1\sigma\sqrt{\tau}-\frac{\sigma^2\tau}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}}.e^{d_1\sigma\sqrt{\tau}}.e^{-\frac{\sigma^2\tau}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}}.e^{\ln\frac{S}{Ee^{-r\tau}}+\frac{\sigma^2\tau}{2}}.e^{-\frac{\sigma^2\tau}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}}.\frac{S}{E.e^{-r\tau}}.e^{\frac{\sigma^2\tau}{2}}.e^{-\frac{\sigma^2\tau}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}}.\frac{S}{E.e^{-r\tau}}$$

Donc : $f(d_2) = f(d_1).\frac{S}{E.e^{-r\tau}}$

Par conséquent :

$\Delta = \Phi(d_1) + S.f(d_1).d'_1 - Ee^{-r\tau}.\ f(d_1).\frac{S}{E.e^{-r\tau}}.\ d'_1.$

En simplifiant par $Ee^{-r\tau}$ et par $S.f(d_1).d'_1$, il ressort que :

Delta du call = $\frac{\delta C}{\delta S} = \Phi(d_1)$

3 cas particuliers peuvent alors être distingués :

<u>1er cas : le call est très *in the money* :</u>

En d'autres termes, S est très supérieur au prix d'exercice actualisé en continu.

Dans ce cas : $S >> Ee^{-r\tau}$ soit encore $\frac{S}{Ee^{-r\tau}} \to +\infty$.

Dès lors : $\Delta = \Phi(d1) = \Phi\left[\frac{\ln\frac{S}{Ee^{-r\tau}}+\frac{\sigma^2\tau}{2}}{\sigma\sqrt{\tau}}\right] = \Phi(+\infty)$ car lim lnx = $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Or : $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ donc : $\Phi(+\infty) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

Et comme $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{\frac{-x^2}{2}}$ est la densité de probabilité d'une variable aléatoire - qui suit une loi normale centrée réduite - son intégrale généralisée $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 1$

Conclusion :

Pour un call très « in the money », le delta est donc égal à 1.

En d'autres termes, le call et l'action sous-jacente varient de la même façon. Pour couvrir un portefeuille constitué d'une action il convient donc de vendre un call *très in the money.*

<u>2ème cas : le call est très *out of the money*</u>

En d'autres termes : S << Ee-rτ ce qui revient à écrire que : $\frac{S}{Ee^{-r\tau}} \to 0$

Dès lors : $\Delta = \Phi(d_1) = \Phi[\frac{\ln\frac{S}{Ee^{-r\tau}}+\frac{\sigma^2\tau}{2}}{\sigma\sqrt{\tau}}] = \Phi(-\infty)$

Donc $\Delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\int_{-\infty}^{-\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 0$ soit $\frac{\delta C}{\delta S} = 0$

Conclusion

Il n'est donc pas possible de couvrir un portefeuille d'actions avec des calls très *out of the money.*

<u>3ème cas : le call est « at the money »</u>

En d'autres termes : $S = Ee^{-r\tau}$

Dès lors : $\Delta = \Phi(d_1) = \Phi[\frac{\ln\frac{S}{Ee^{-r\tau}}+\frac{\sigma^2\tau}{2}}{\sigma\sqrt{\tau}}] = \Phi[\frac{\frac{\sigma^2\tau}{2}}{\sigma\sqrt{\tau}}]$ car ln1 = 0

Donc : $\Delta = \Phi(d_1) = \Phi[\frac{\sigma\tau}{2\sqrt{\tau}}] = \Phi[\frac{\sigma\tau\sqrt{\tau}}{2\tau}] = \Phi[\frac{\sigma\sqrt{\tau}}{2}]$ qui tend vers $\Phi(0)$ quand $\tau \to 0$.

Or $\Phi(0) = 0,5$. Donc Δ tend vers 0,5

Conclusion

Si le cours de l'action varie de 1, la prime du call varie de 0,5. Par conséquent pour couvrir un portefeuille composé d'une action, il convient de vendre 2 calls.

Dans ce cas la perte réalisée sur l'action en cas de baisse de son cours est compensée par le gain réalisé sur le marché des options.

Par ailleurs, la formule de la parité call-put permet d'en déduire le delta du put. En effet :

$P = C - S + E.e^{-r\tau}$. Dès lors :

Delta du put $= \frac{\partial P}{\partial S} = \frac{\partial C}{\partial S} - \frac{\partial S}{\partial S} + E.\frac{\partial e^{-r\tau}}{\partial S}$ = Delta du call – 1 – 0 = $\Phi(d_1) - 1$

Finalement :

Delta du put = $-\Phi(-d_1)$

Exemple 1

Une action dont le cours est de 120 € est support d'options (call et put) dont le prix d'exercice est égal à 100 €, le date d'échéance fixée au 01/01/2003 et la volatilité estimée à 20%. En outre le taux des OAT est de 6%.
Les primes C et P respectivement du call et du put, calculées le 01/01/2003 peuvent être déterminées par la formule de Black and Scholes :

Le taux sans risque continu est r = ln(1+0,06) = 0,0583 = 5,83%.
La durée restant jusqu'à l'échéance est $\tau = \frac{(01/11/2003 - 01/01/2003)}{365}$ = 0,833 année

$$d_1 = \frac{\ln\frac{120}{100} + (0{,}0583 + \frac{0{,}20^2}{2}).0{,}833}{0{,}20.\sqrt{0{,}833}} = 1{,}36$$

$d_2 = 1{,}36 - 0{,}20\sqrt{0{,}833} = 1{,}17$

$C = 120.\Phi(1{,}36) - 100.e^{-0{,}0583x0{,}833}\,\Phi(1{,}17) = 25{,}69$ €
$P = 25{,}69 - 120 + 100.\ e^{-0{,}0583x0{,}833} = 0{,}95$ €.

Le delta du call est égal à .$\Phi(1{,}36) = 0{,}91$ et le delta du put à $-\Phi(-1{,}17) = -0{,}09$.

En d'autres termes, une augmentation de 1 € du cours de l'action sous-jacente se traduit par une hausse de la prime du call de 0,91 € et une baisse de la prime du put de 0,09 €.

En effet, les primes respectives du call et du put correspondant à un cours du sous-jacent de 121 €, calculées à nouveau à l'aide de la formule de Black and Scholes s'établissent respectivement à 26,61 € et 0,87 € :

$$d_1 = \frac{\ln\frac{121}{100} + (0{,}0583 + \frac{0{,}20^2}{2}).0{,}833}{0{,}20.\sqrt{0{,}833}} = 1{,}40 \text{ et } d_2 = 1{,}40 - 20\sqrt{0{,}833} = 1{,}22$$

$C = 121.\Phi(1{,}40) - 100.e^{-0{,}0583x0{,}833}\,\Phi(1{,}22) = 26{,}61$ €
$P = 26{,}61 - 120 + 100.\ e^{-0{,}0583x0{,}833} = 0{,}87$ €.

La prime du call, portée de 25,69 € à 26,61, a progressé de 0,92 € (montant très voisin de celui du delta du call égal à 0,91 €), tandis que la prime du put, ramenée de 0,95 € à 0,87 €, a diminué de 0,08 € (montant très voisin de celui du delta du put égal à -0,09 €).

Le léger écart (de l'ordre de 0,01 €) entre d'une part la variation des primes des options, d'autre part leur delta s'explique par le mode de détermination du delta. Celui-ci a en effet été calculé comme une dérivée de la prime par rapport au cours de l'action sous-jacente. Or la dérivée exprime la variation de la prime pour une très petite variation de la variable numérique (qui est ici le cours de l'action sous-jacente). En d'autres termes, elle permet un calcul plus précis de l'impact d'une variation de 0,01 € de l'action sous-jacente.

2. Gamma

La mise en place d'une couverture s'appuie sur la formule du $\Delta = \Phi(d_1)$. Or d_1 est fonction de S ; par conséquent le Δ varie en permanence entre autres à cause de la variation du cours du sous-jacent.

La couverture mise en place doit donc être ajustée en permanence.

Le gamma mesure l'incidence d'une variation du cours du sous-jacent sur la valeur de Δ.

En d'autres termes, $\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \Delta'(S)$.

Comme $\Delta = \Phi(d_1)$ alors : $\Delta' = \{\Phi[d_1(S)]\}' = f[d_1(S)].\ d_1'(S)$

Avec, comme précédemment, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{\frac{-x^2}{2}}$ qui représente la densité de probabilité de la loi normale centrée réduite.

Donc:

Γ du call = $\frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{f(d_1)}{S\sigma\sqrt{\tau}}$

avec $d_1 = \frac{\ln\frac{S}{Ee^{-r\tau}} + \frac{\sigma^2\tau}{2}}{\sigma\sqrt{\tau}}$ et $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{\frac{-x^2}{2}}$

Le gamma mesure l'incidence d'une variation du cours de l'action sous-jacente sur le delta, c'est-à-dire sur le nombre de calls qu'il faut vendre pour couvrir un portefeuille d'actions.

Γ est maximum lorsque :

- τ voisin est voisin de 0. C'est le cas lorsque les options sont courtes ou que leur date d'échéance est proche ;

- $f(d_1)$ est maximum c'est-à-dire lorsque $d_1 = 0$. C'est le cas lorsque, pour des options courtes (τ voisin de 0), $\frac{S}{Ee^{-r\tau}}$ = 1 ce qui revient à écrire : $S = Ee^{-r\tau}$, expression qui caractérise une option at the money

Conclusion

Le ajustements quotidiens de la couverture d'un portefeuille d'action sont d'autant plus importants qu'il a été couvert par la vente de calls proches de la monnaie.

Par ailleurs, la formule de la parité call-put permet d'en déduire le delta du put. En effet :

$P = C - S + E.e^{-r\tau}$. Dès lors :

Gamma du put = $\frac{\partial^2 P}{\partial S^2} = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - \frac{\partial^2 S}{\partial S^2} + E.\frac{\partial^2 e^{-r\tau}}{\partial S^2}$ = Gamma du call – 0 – 0 = Gamma du call

Finalement :

Gamma du put = gamma du call = $\frac{f(d_1)}{S\sigma\sqrt{\tau}}$

Exemple 2

Le gamma des options de l'exemple 1 exprime la variation des deltas pour une variation du cours de l'action sous-jacente de 1 € :

Dans la mesure où $d_1 = 1{,}36$:

$f(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{\frac{-1{,}36^2}{2}} = 0{,}16$

Gamma du call et du put = $\frac{0{,}16}{120x0{,}20\sqrt{0{,}833}}$ = 0,01 €.

Ce montant est voisin des variations des deltas des options. En effet, dans l'hypothèse d'un cours de l'action sous-jacente de 121 € :

Delta du call = $\Phi(1{,}40) = 0{,}92$
Delta du put = $-\Phi(-1{,}22) = -0{,}08$

La progression de 1 € du cours de l'action sous-jacente a donc porté le delta du call de 0,91 € à 0,92 €, soit une progression de 0,01 € le delta du put de –0,09 € à 0,08 €, soit encore une progression de 0,01 €, égal au montant du gamma.

3. Véga

Il mesure l'incidence d'une variation de la volatilité sur le cours du sous-jacent. En d'autres termes : Véga = $\frac{\partial C}{\partial \sigma}$ = C'(σ) avec :

$C = S\Phi(d_1) – Ee^{-r\tau}\Phi(d_2)$, $d_1 = \dfrac{\ln\frac{S}{Ee^{-r\tau}} + \frac{\sigma^2 \tau}{2}}{\sigma\sqrt{\tau}}$ et $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$

$C'(\sigma) = S\{\Phi[d_1(\sigma)]\}' - Ee^{-r\tau}\{\Phi[d_2(\sigma)]\}'$

$= S.f[d_1(\sigma)].d'_1(\sigma) - Ee^{-r\tau}.f[d_2(\sigma)].d'_2(\sigma)$

Or : $f(d_2) = f(d_1).\frac{S}{E.e^{-r\tau}}$

Et : $d_2(\sigma) = d_1(\sigma) - \sigma\sqrt{\tau}$ donc, $d'_2(\sigma) = d'_1(\sigma) - \sqrt{\tau}$

Par conséquent :

$C'(\sigma) = S.f(d_1).d'_1 - Ee^{-r\tau}.\ f(d_1).\frac{S}{E.e^{-r\tau}}.(d'_1 - \sqrt{\tau})$.

$= S.f(d_1).d'_1 - Ee^{-r\tau}.\ f(d_1).\frac{S}{E.e^{-r\tau}}.\ d'_1 + Ee^{-r\tau}.\ f(d_1).\frac{S}{E.e^{-r\tau}}.\ \sqrt{\tau}$).

En simplifiant par $Ee^{-r\tau}$ puis par $S.f(d_1).d'_1$ on en déduit que :

Véga du call = $\frac{\delta C}{\delta \sigma} = S.f(d_1).\sqrt{\tau}$

Le Véga est maximum lorsque :

- $f(d_1)$ est maximum, c'est-à-dire lorsque $d_1 = 0$. L'option est alors *at the money* ;
- lorsque τ tant vers ∞, c'est-à-dire lorsque que l'option est longue et sa date d'échéance éloignée.

Par ailleurs, la formule de la parité call-put permet d'en déduire le delta du put. En effet :

$P = C – S + E.e^{-r\tau}$. Dès lors :

Véga du put $= \frac{\partial P}{\partial \sigma} = \frac{\partial C}{\partial \sigma} - \frac{\partial S}{\partial \sigma} + E.\frac{\partial e^{-r\tau}}{\partial \sigma}$ = Véga du call – 0 – 0

Finalement :

Véga du call = véga du put = $S.f(d_1).\sqrt{\tau}$

Exemple 3

Le véga des options de l'exemple 1 exprime la variation des primes des options engendrée par une variation de la volatilité de 1, c'est-à-dire de 100% :

Dans la mesure où $f(d_1) = 0{,}16$:

Véga du call et du put = $120x0{,}16x\sqrt{0{,}833}$ = 17 €. Par conséquent, pour une variation de la volatilité limitée à 1%, le véga s'établit à 0,17 €.

Ce montant est voisin des variations des deltas des options. En effet, dans l'hypothèse d'un cours de l'action sous-jacente de 120 € et d'une volatilité de 21% :

$$d_1 = \frac{\ln\frac{120}{100} + (0{,}0583 + \frac{0{,}21^2}{2}).0{,}833}{0{,}21.\sqrt{0{,}833}} = 1{,}30$$

$d_2 = 1{,}30 - 0{,}21\sqrt{0{,}833} = 1{,}11$

$C = 120.\Phi(1{,}30) - 100.e^{-0{,}0583x0{,}833}\,\Phi(1{,}11) = 25{,}87$ €
$P = 25{,}87 - 120 + 100.\ e^{-0{,}0583x0{,}833} = 1{,}14$ €.

La prime du call, portée de 25,69 € à 25,87 €, a progressé de 0,18 € tandis que la prime du put, portée de 0,95 € à 1,14 €, a également progressé de 0,18 €, montant très voisin de celui du véga des options égal à 0,17 €.

4. Théta

Il mesure l'incidence d'une variation de la durée restant jusqu'à l'échéance sur le cours du sous-jacent.

En d'autres termes Théta = $\theta = \dfrac{\partial C}{\partial \tau} = C'(\tau)$

avec C = $S\Phi(d_1) - Ee^{-r\tau}\Phi(d_2)$

$\theta = C'(\tau) = S\{\Phi[d_1(\tau)]\}' + r.Ee^{-r\tau}\Phi[d_2(\tau)] - Ee^{-r\tau}\{\Phi[d_2(\tau)]\}'$ avec $d_1 = \dfrac{\ln\dfrac{S}{Ee^{-r\tau}} + \dfrac{\sigma^2\tau}{2}}{\sigma\sqrt{\tau}}$

et $d_2(\tau) = d_1(\tau) - \sigma\sqrt{\tau}$ donc : $d'_2(\tau) = d'_1(\tau) - \dfrac{\sigma}{2\sqrt{\tau}}$

Par ailleurs : $\{\Phi[d_1(\tau)]\}' = f[d_1(\tau)].d'_1(\tau)$

Et $\{\Phi[d_2(\tau)]\}' = f[d_2(\tau)].d'_2(\tau)$

Donc :

$\theta = C'(\tau) = S.f[d_1(\tau)].d'_1(\tau) + r.Ee^{-r\tau}\Phi[d_2(\tau)] - Ee^{-r\tau}.f[d_2(\tau)].d'_2(\tau)$

En outre : $f(d_2) = f(d_1).\dfrac{S}{E.e^{-r\tau}}$

Dans ce cas :

$\theta = S.f[d_1(\tau)].d'_1(\tau) + r.Ee^{-r\tau}\Phi[d_2(\tau)] - Ee^{-r\tau}.\ f[d_1(\tau)].\dfrac{S}{E.e^{-r\tau}}.\ [d'_1(\tau) - \dfrac{\sigma}{2\sqrt{\tau}}]$

$= S.f[d_1(\tau)].d'_1(\tau) + r.Ee^{-r\tau}\Phi[d_2(\tau)] - S.f[d_1(\tau)].\ [d'_1(\tau) - \dfrac{\sigma}{2\sqrt{\tau}}].$

En simplifiant par $S.f[d_1(\tau)].d'_1(\tau)$:

Théta du call = $\dfrac{\partial C}{\partial \tau} = r.Ee^{-r\tau}\Phi(d_2) + S.f(d_1).\dfrac{\sigma}{2\sqrt{\tau}}$

La formule de la parité call-put permet d'en déduire le théta du put. En effet :

P = C – S + $E.e^{-r\tau}$.

Dès lors :

Théta du put $= \dfrac{\partial P}{\partial \tau} = \dfrac{\partial C}{\partial \tau} - \dfrac{\partial S}{\partial \tau} + E.\dfrac{\partial e^{-r\tau}}{\partial \tau}$ = Théta du call – 0 -r $E.e^{-r\tau}$

$= r.Ee^{-r\tau}\Phi[d_2(\tau)] + S.f[d_1(\tau)].\dfrac{\sigma}{2\sqrt{\tau}}$ -r $E.e^{-r\tau}$

$= r.Ee^{-r\tau}\ \{\Phi[d_2(\tau)]-1\} + S.f[d_1(\tau)].\dfrac{\sigma}{2\sqrt{\tau}}$

Théta du put $= -r.Ee^{-r\tau}\ \Phi(-d_2) + S.f(d_1).\dfrac{\sigma}{2\sqrt{\tau}}$

Exemple 4

Le théta des options de l'exemple 1 exprime la variation des primes des options engendrée par une variation d'un an de la durée restant jusqu'à l'échéance :

Théta du call $= 0{,}0583 \text{ x } 100e^{-0{,}0583 \text{ x } 0{,}833}\Phi(1{,}36) + 100x0{,}16x\dfrac{0{,}20}{2\sqrt{0{,}833}} = 6{,}97$ €

Théta du put $= -0{,}0583 \text{ x } 100e^{-0{,}0583 \text{ x } 0{,}833}\Phi(1{,}36) + 100x0{,}16x\dfrac{0{,}20}{2\sqrt{0{,}833}} = 1{,}42$ €

Il est alors possible d'en déduire l'impact du rapprochement d'une journée de la date d'échéance :

Théta du call $= -\dfrac{6{,}97}{365} = -0{,}02$ €

Théta du put $= -\dfrac{1{,}42}{365} = -0{,}00$ €

Dans l'hypothèse où les valorisation des options est réalisée le 02/01/2003 (rapprochement d'une journée de la date d'échéance) :

$\tau = \dfrac{(01/11/2003 - 02/01/2003)}{365} = 0{,}830$ année

$d_1 = \dfrac{\ln\dfrac{120}{100} + (0{,}0583 + \dfrac{0{,}20^2}{2}).0{,}830}{0{,}20.\sqrt{0{,}830}} = 1{,}36$

$d_2 = 1{,}36 - 0{,}20\sqrt{0{,}830} = 1{,}17$

$C = 120.\Phi(1{,}36) - 100.e^{-0{,}0583x0{,}830}\ \Phi(1{,}17) = 25{,}67$ €
$P = 25{,}69 - 120 + 100.\ e^{-0{,}0583x0{,}830} = 0{,}95$ €.
La prime du call, ramenée de 25,69 € à 25,67 €, a diminué de 0,02 € (montant égal à celui du théta du call), tandis que la prime du put, est restée quasiment inchangée (théta voisin de 0 €).

5. Rhô

Il mesure l'incidence d'une variation du taux sans risque sur le cours de l'action sous-jacente.

En d'autres termes Rho = $\rho = \frac{\partial C}{\partial r}$ = C'(r)

avec C = SΦ(d_1)–$Ee^{-r\tau}$Φ(d_2)

ρ = C'(r) = S{Φ[d_1(r)]}'+ τ $Ee^{-r\tau}$Φ[d_2(r)]-$Ee^{-r\tau}${Φ[d_2(r)]}' avec $d_1 = \frac{\ln\frac{S}{Ee^{-r\tau}}+\frac{\sigma^2\tau}{2}}{\sigma\sqrt{\tau}}$

et $d_2(\tau) = d_1(\tau)-\sigma\sqrt{\tau}$ donc : d'_2(r) = d'_1®

Par ailleurs : {Φ[d_1(r)]}'= f[d_1(r)].d'_1(r)

Et {Φ[d_2(r)]}'= f[d_2(r)].d'_2(r)

Donc :

ρ = C'(r) = S.f[d_1(r)].d'_1(r)+ τ .$Ee^{-r\tau}$Φ[d_2(r)]-$Ee^{-r\tau}$ .f[d_2(r)].d'_2(r)

En outre :

$$f(d_2) = f(d_1).\frac{S}{E.e^{-r\tau}}$$

Dans ce cas :

ρ = $S.f[d_1(r)]$.d'_1(r)+ τ .$Ee^{-r\tau}$Φ[d_2(r)]-$Ee^{-r\tau}$. $f[d_1(r)].\frac{S}{E.e^{-r\tau}}$. d'_1(r)

En simplifiant par $S.f[d_1(r)]$.d'_1(r) :

Rho du call = $\frac{\partial C}{\partial r} = \tau$.$Ee^{-r\tau}$Φ(d_2)

La formule de la parité call-put permet d'en déduire le rho du put.

Rho du put = $\frac{\partial P}{\partial r}$ = $\frac{\partial C}{\partial r}$ - $\frac{\partial S}{\partial r}$ +E. $\frac{\partial e^{-r\tau}}{\partial \tau} r$ = Rho du call – 0 - τ . $E.e^{-r\tau}$

= τ .$Ee^{-r\tau}$Φ(d_2) - τ . $E.e^{-r\tau}$

= τ . $E.e^{-r\tau}$ [1-Φ(d_2)]

Par conséquent :

Rho du put = $\tau \, . \, E.e^{-r\tau} \, .\Phi(\text{-d}_2)$

Exemple 5

Le rho des options de l'exemple 1 exprime la variation des primes des options engendrée par une variation de 1, soit 100%, du taux sans risque
Rho du call = 0,833 x 100.$e^{-0,583x0,833}\Phi(1,17)$ = 70 €

Rho du put = 0,833 x 100.$e^{-0,583x0,833}\Phi(-1,17)$ = 0,833 x 100.$e^{-0,583x0,833}[\Phi(1,17)-1]$ = -10 €

Il est alors possible d'en déduire l'impact d'une variation de 1% du taux sans risque :

Rho du call = $\frac{70}{100}$ = 0,70 €

Rho du put = - $\frac{10}{100}$ = -0,10 €

Dans l'hypothèse où le taux sans risque continu est porté à 6,83%

$$d_1 = \frac{\ln\frac{120}{100} + (0{,}0683 + \frac{0{,}20^2}{2}).0{,}833}{0{,}20.\sqrt{0{,}833}} = 1{,}40$$

$d_2 = 1{,}40 - 0{,}20\sqrt{0{,}833} = 1{,}22$

C = 120.Φ(1,40)–100.$e^{-0,0683x0,833}$ Φ(1,27) = 26,39 €
P = 26,39 – 120 + 100. $e^{-0,0683x0,833}$= 0,86 €.

La prime du call, portée de 25,69 € à 26,39 €, a progressé de 0,70 € (montant égal à celui du rho du call), tandis que la prime du put, ramenée de 0,95 € à 0,86 € est réduite de 0,09 € (montant voisin du rho du put égal à 0,10€).

La synthèse des résultats des 5 exemples est présentée ci-après :

Tableau n°1 : exemple de mise évidence du delta, du gamma, du theta et du rho d'un call et d'un put

Montants en €	Cas de base	Analyse de sensibilité de la prime à une variation du cours du sous-jacent	de la volatilité	de la durée jusqu'à l'échéance	du taux sans risque
Date de l'évaluation	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	02/01/2003	01/01/2003
Date d'échéance des options	01/11/2003	01/11/2003	01/11/2003	01/11/2003	01/11/2003
Cours comptant de l'action sous-jacente	120	121	120	120	120
Prix d'exercice	100	100	100	100	100
Taux sans risque (OAT 10 ans) observé	6,00%	6,00%	6,00%	6,00%	7,07%
Taux sans risque continu	5,83%	5,83%	5,83%	5,83%	6,83%
Durée restant jusqu'à l'échéance (en années)	0,833	0,833	0,833	0,830	0,833
Volatilité	20%	20%	21%	20%	20%
d1	1,36	1,40	1,30	1,36	1,40
d2	1,17	1,22	1,11	1,17	1,22
F(d1)	0,9125	0,9195	0,9033	0,9126	0,9195
F(d2)	0,8797	0,8886	0,8662	0,8800	0,8886
Valeur du call	**25,69**	**26,61**	**25,87**	**25,67**	**26,39**
Valeur du put	**0,95**	**0,87**	**1,14**	**0,95**	**0,86**
Variation de la valeur du call		0,92	0,18	(0,02)	0,70
Variation de la valeur du put		(0,08)	0,18	(0,00)	(0,09)
f(d1)	0,16				
Delta call (1)	0,91	0,92			
Delta put (1)	(0,09)	(0,08)			
Véga call (2)	0,17				
Véga put (2)	0,17				
Théta call (3)	(6,97)				
Théta put (3)	(1,42)				
Rho call (4)	0,70				
Rho put (4)	(0,10)				
Variation du delta du call		0,01			
Variation du delta du put		0,01			
Gamme call	0,01				
Gamme put	0,01				

(1) : variation de la prime de l'option pour une augmentation du cours de l'action sous-jacente de 1 €
(2) : variation de la prime de l'option pour une augmentation de la volatilité de l'action sous-jacente de 1%
(3) : variation de la prime de l'option pour une réduction de 1 an de la durée restant jusqu'à l'échéance
(4) : variation de la prime de l'option pour une augmentation de la taux sans risque de 1%

NB : F est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et f sa densité.