

Mathématiques financières

Olivier Levyne (2009) – Professeur des Universités

Exercices de révision

Exercice 1

Un investisseur souscrit à l'émission d'un billet de trésorerie dont les caractéristiques sont les suivantes :

- Nominal : 5 M€
- Taux facial : 3,2%
- Durée de vie : 9 mois

L'investisseur doit revendre son titre au bout de 45 jours. A cette date, le taux de référence du marché monétaire est de 3,9%.

1. Déterminer le prix de revente du titre
2. Calculer le taux de rendement effectif du placement de l'investisseur

Exercice 2

Un particulier obtient de sa banque une proposition de crédit de 100 000 € au taux nominal de 4,9%, remboursable par mensualités constantes.

1. Calculer le taux mensuel
2. Quel taux la banque lui aurait-elle annoncé pour un remboursement par annuités constantes, par trimestrialités constantes, par semestrialités constantes
3. Calculer le taux continu équivalent
4. Etablir le tableau d'amortissement dans l'hypothèse de semestrialités constantes sur 5 ans. On précise que le taux d'ADI est de 0,45%

Exercice 3

Une entreprise émet, le 8 avril 2007, un emprunt obligataire de 30 M€ composé de 30 000 obligations d'une valeur nominale de 1000 €. Leur taux facial est de 4,5%. La durée de vie de cet emprunt est de 5 ans.

1. Présenter le tableau d'amortissement de l'emprunt, dans chacun des 3 cas suivants : remboursement in fine, amortissements constants et annuités constantes.
2. Déterminer, dans chacun des 3 cas la duration et la sensibilité de l'obligation
3. Finalement l'entreprise décide de procéder par remboursement in fine. A la fin de la première journée de cotation, le taux de référence du marché obligataire est porté de 4,50% à 4,51%. Calculer la nouvelle valeur de l'obligation et la variation relative de son prix.
4. Retrouver le résultat de la question 3 à l'aide du résultat de la question 2.
5. Un souscripteur décide, le 10 février 2009 de revendre une obligation. A cette date, le taux de référence du marché obligataire est égal à 3,9%. Déterminer le prix de revente du titre
6. Le 10 février 2009, l'obligation est cédée pour 1085 €. Expliquer, formules et syntaxe à l'appui, comment déterminer, à l'aide d'Excel, le TAB pour l'investisseur.
7. En déduire numériquement le TAB (*cette question ne serait pas posée lors d'un partiel*)

Exercice 4

Une entreprise envisage l'acquisition d'une usine pour 3 M€. Cette usine lui permettrait de générer, chaque année, pendant les 8 ans à venir, un cash flow de 1 M€ par an. Sur la base d'un taux d'actualisation de 10%

1. Calculer la VAN de cet investissement
2. Ecrire la formule permettant de déterminer le TIR de cet investissement
3. En déduire numériquement le TIR (*cette question ne serait pas posée lors d'un partiel*)

Corrections

Exercice 1

Soit M le montant perçu par l'investisseur si le TCN est conservé jusqu'à l'échéance.

M correspond au remboursement du principal augmenté des intérêts dus au titre du placement pendant 9 mois soit 270 jours et calculés selon le principe de l'intérêt simple. En d'autres termes, à l'échéance, l'investisseur reçoit une somme égale à la capitalisation au taux de 3,2% (pro-ratisé sur 270 jours) de son capital initial de 5 000 000 €. Ainsi :

$$M = 5000000 \cdot \left(1 + \frac{3,2\% \times 270}{360} \right) = 5\,120\,000 \text{ €}$$

- 1. Détermination du prix de revente du TCN au bout de 45 jours

Soit P ce prix de revente.

P doit être fixé de telle sorte que le rendement qui sera procuré à l'acheteur soit le même que celui qu'il obtiendrait à partir d'un placement sur le marché monétaire (soit 3,9%) sur la même période que celle qui reste jusqu'à l'échéance (soit 225 jours).

En outre, dans la mesure où la société émettrice du TCN verse au porteur du titre la somme de 5 120 000 (déterminée au paragraphe précédent), P vérifie:

$$P \cdot \left(1 + \frac{3,9\% \times 225}{360} \right) = 5\,120\,000.$$

Donc :

$$P = \frac{5\,120\,000}{1 + \frac{3,9\% \times 225}{360}} = 4\,998\,170 \text{ €}$$

- 2. Détermination du taux de rendement du placement

Le souscripteur a finalement placé 5 000 000 € pendant 45 jours et récupéré 4 998 170 € en revendant le TCN. Soit i le rendement de son placement ; i vérifie :

$$5000000 \left(1 + \frac{45i}{360} \right) = 4\,998\,170$$

Donc :

$$i = \frac{360}{30} \left(\frac{4998170}{5000000} - 1 \right) = -0,29\%$$

Exercice 2

1) Le taux mensuel est proportionnel au taux nominal. Il est donc égal à :

$$\frac{4,90\%}{12} = 0,41\%$$

2) Dans l'hypothèse d'un remboursement par annuités constantes, la banque aurait annoncé un taux r équivalent (annuel) au taux nominal i . Dès lors :

$$1 + r = \left(1 + \frac{4,90\%}{12} \right)^{12} \text{ soit : } r = (1,0041)^{12} - 1 = 5,01\%$$

Dans l'hypothèse d'un remboursement par trimestrialités constantes, la banque aurait annoncé un taux nominal i équivalent à $r = 5,01\%$. Dès lors :

$$1 + 5,01\% = \left(1 + \frac{i}{4} \right)^4 \text{ soit : } i = 4 \cdot (1,0501^{\frac{1}{4}} - 1) = 4,92\%$$

Dans l'hypothèse d'un remboursement par semestrialités constantes, la banque aurait annoncé un taux nominal i équivalent à $r = 5,01\%$. Dès lors :

$$1 + 5,01\% = \left(1 + \frac{i}{2} \right)^2 \text{ soit : } i = 2 \cdot (1,0501^{\frac{1}{2}} - 1) = 4,95\%$$

3) Le taux continu i équivalent au taux discret $r = 5,01\%$ vérifie :

$$i = \ln(1 + 5,01\%) = \ln 1,0501 = 4,89\%$$

4) Tableau d'amortissement

Le taux semestriel i est issu du taux nominal calculé pour des semestrialités ; i vérifie :

$$i = \frac{4,95\%}{2} = 2,475\%$$

Par ailleurs, le taux d'ADI indiqué par la banque est un taux nominal, nécessairement annuel. Il est proportionnel au taux d'ADI semestriel. Soit i' ce taux ; i' vérifie :

$$i = \frac{0,45\%}{2} = 0,225\%$$

La semestrialité constante a vérifie :

$$a = \frac{100000 \cdot 2,475\%}{1 - (1 + 2,475\%)^{-(5 \cdot 2)}} = 11411 \text{ €}$$

Le tableau d'amortissement par semestrialités constantes est alors le suivant :

Remboursement par semestrialités constantes						
Mois	Reste à rembourser	Intérêts	Amortissements	Semestrialités	ADI	Total
1	100 000	2 475	8 936	11 411	225	11 636
2	91 064	2 254	9 157	11 411	205	11 616
3	81 907	2 027	9 384	11 411	184	11 595
4	72 523	1 795	9 616	11 411	163	11 574
5	62 907	1 557	9 854	11 411	142	11 553
6	53 052	1 313	10 098	11 411	119	11 531
7	42 954	1 063	10 348	11 411	97	11 508
8	32 606	807	10 604	11 411	73	11 485
9	22 002	545	10 867	11 411	50	11 461
10	11 136	276	11 136	11 411	25	11 436
Total			100 000	114 112	1 283	115 395

Exercice 3

1. Tableaux d'amortissement de l'emprunt

Remboursement in fine					
Années t	Date	Reste à rembourser	Intérêts	Amortissements	Annuités CF _t
1	08/04/2008	30 000 000	1 350 000	0	1 350 000
2	08/04/2009	30 000 000	1 350 000	0	1 350 000
3	08/04/2010	30 000 000	1 350 000	0	1 350 000
4	08/04/2011	30 000 000	1 350 000	0	1 350 000
5	08/04/2012	30 000 000	1 350 000	30 000 000	31 350 000

Remboursement par amortissements constants						
Années t	Date	Reste à rembourser	Intérêts	Amortissements	Annuités CF _t	Nombre d'obligations remboursées
1	08/04/2008	30 000 000	1 350 000	6 000 000	7 350 000	6 000
2	08/04/2009	24 000 000	1 080 000	6 000 000	7 080 000	6 000
3	08/04/2010	18 000 000	810 000	6 000 000	6 810 000	6 000
4	08/04/2011	12 000 000	540 000	6 000 000	6 540 000	6 000
5	08/04/2012	6 000 000	270 000	6 000 000	6 270 000	6 000
Total			4 050 000	30 000 000	34 050 000	30 000

Dans l'hypothèse d'annuités constantes a , a vérifie :

$$a = \frac{30.000.000 \times 4,5\%}{1 - (1 + 4,5\%)^{-5}} = 6.833.749\text{€}$$

Remboursement par annuités constantes						
Années t	Date	Reste à rembourser	Intérêts	Amortissements	Annuités CF _t	Nombre d'obligations remboursées
1	08/04/2008	30 000 000	1 350 000	5 483 749	6 833 749	5 484
2	08/04/2009	24 516 251	1 103 231	5 730 518	6 833 749	5 731
3	08/04/2010	18 785 733	845 358	5 988 391	6 833 749	5 988
4	08/04/2011	12 797 342	575 880	6 257 869	6 833 749	6 258
5	08/04/2012	6 539 473	294 276	6 539 473	6 833 749	6 539
Total			4 168 746	30 000 000	34 168 746	30 000

2. Duration et sensibilité

Soit D la duration, S la sensibilité et P le prix de l'obligation. D vérifie :

$$D = \frac{\sum_{t=1}^n \frac{t \cdot CF_t}{(1+i)^t}}{P} = \frac{\sum_{t=1}^n \frac{t \cdot CF_t}{(1+i)^t}}{\sum_{t=1}^n \frac{CF_t}{(1+i)^t}}$$

Le numérateur correspond à la somme des termes de la dernière colonne et le dénominateur à la somme des derniers termes de l'avant dernière colonne des tableaux ci-après :

Remboursement in fine					
Années t	Annuités CF _t	Nombre d'obligations remboursées	CF _t /(1+i) ^t	t.CF _t /(1+i) ^t	
1	1 350 000	0	1 291 866	1 291 866	
2	1 350 000	0	1 236 235	2 472 471	
3	1 350 000	0	1 183 000	3 549 001	
4	1 350 000	0	1 132 058	4 528 231	
5	31 350 000	30 000	25 156 840	125 784 202	
4,5% Somme			30 000 000	137 625 771	
Duration				4,59	
Sensibilité				-4,39	

Ici :

$$D = \frac{\sum_{t=1}^n \frac{t \cdot CF_t}{(1+i)^t}}{P} = \frac{137.625.771}{30.000.000} = 4,59 \text{ans}$$

$$S = \frac{-D}{1+i} = \frac{-4,59}{1,045} = -4,39$$

Remboursement par amortissements constants				
Années t	Annuités CF _t	Nombre d'obligations remboursées	CF _t /(1+i) ^t	t.CF _t /(1+i) ^t
1	7 350 000	6 000	7 033 493	7 033 493
2	7 080 000	6 000	6 483 368	12 966 736
3	6 810 000	6 000	5 967 580	17 902 740
4	6 540 000	6 000	5 484 191	21 936 765
5	6 270 000	6 000	5 031 368	25 156 840
Total	34 050 000	30 000	30 000 000	84 996 574
	4,5%	Duration		2,83
		Sensibilité		-2,71

Ici :

$$D = \frac{\sum_{t=1}^n \frac{t.CF_t}{(1+i)^t}}{P} = \frac{84.996.574}{30.000.000} = 2,83 \text{ans}$$

$$S = \frac{-D}{1+i} = \frac{-2,83}{1,045} = -2,71$$

Remboursement par annuités constantes				
Années t	Annuités CF _t	Nombre d'obligations remboursées	CF _t /(1+i) ^t	t.CF _t /(1+i) ^t
1	6 833 749	5 484	6 539 473	6 539 473
2	6 833 749	5 731	6 257 869	12 515 738
3	6 833 749	5 988	5 988 391	17 965 174
4	6 833 749	6 258	5 730 518	22 922 072
5	6 833 749	6 539	5 483 749	27 418 746
Total	34 168 746	30 000	30 000 000	87 361 202
	4,5%	Duration		2,91
		Sensibilité		-2,79

$$D = \frac{\sum_{t=1}^n \frac{t.CF_t}{(1+i)^t}}{P} = \frac{87.361.202}{30.000.000} = 2,91 \text{ans}$$

3. Détermination de la nouvelle valeur P' de l'obligation dans l'hypothèse où le taux de référence du marché obligataire est porté de 4,50% à 4,51%

Il convient pour cela de sommer les annuités (CF_t) des tableaux précédents en les actualisant à 4,51% (au lieu de les actualiser à 4,50%). Cette augmentation de 0,01% du taux d'actualisation va mécaniquement provoquer une baisse de la valeur de l'obligation qui va ainsi tomber en deçà du nominal (de 1 000 €). En effet :

Remboursement in fine		
Années t	Annuités CF_t	$CF_t/(1+i)^t$
1	1 350 000	1 291 742
2	1 350 000	1 235 999
3	1 350 000	1 182 661
4	1 350 000	1 131 625
5	31 350 000	25 144 807
Total		29 986 834
Cours de l'obligation		999,56

Amortissements constants		
Années t	Annuités CF_t	$CF_t/(1+i)^t$
1	7 350 000	7 032 820
2	7 080 000	6 482 127
3	6 810 000	5 965 867
4	6 540 000	5 482 092
5	6 270 000	5 028 961
Total		29 991 868
Cours de l'obligation		999,73

Annuités constantes		
Années t	Annuités CF_t	$CF_t/(1+i)^t$
1	6 833 749	6 538 847
2	6 833 749	6 256 671
3	6 833 749	5 986 672
4	6 833 749	5 728 325
5	6 833 749	5 481 126
Total		29 991 642
Cours de l'obligation		999,72

A noter que le cours de l'obligation est obtenu en divisant la valeur de l'ensemble de l'emprunt obligataire (qui correspond à la somme des cash flows actualisés figurant

dans la dernière colonne de chaque tableau ci-avant) par le nombre d'obligations émises (égal à 30 000).

Le tableau ci-après synthétise les variations de cours de l'obligation lorsque le taux de référence augmente de 0,01% en étant porté de 4,50% à 4,51% :

Synthèse sensibilité

Taux			Variation		dP/P
	4,50%	4,51%	0,01%		
Prix de l'ensemble des obligations					
. Remboursement in fine	30 000 000	29 986 834	(13 166)	-0,0439%	}
. Amortissements constants	30 000 000	29 991 868	(8 132)	-0,0271%	
. Annuités constantes	30 000 000	29 991 642	(8 358)	-0,0279%	

Les variations de prix en € de l'avant dernière colonne du tableau ci-dessus peuvent être exprimées en pourcentage du prix initial de 30 M€. Cette variation en % s'appelle la variation relative du prix et se note dP/P. Elle est calculée dans la dernière colonne.

4. Vérification de la variation relative du prix P de l'obligation lorsque le taux de référence du marché obligataire est porté de 4,50% à 4,51%.

On sait que :

$$S = \frac{\frac{dP}{P}}{di}$$

Donc :

$$\frac{dP}{P} = S \cdot di$$

Ici di = variation du taux d'intérêt de référence = 0,01% = 4,51% - 4,50%

Et on connaît S dans chacun des cas d'amortissement de l'emprunt obligataire :

- Remboursement in fine : $S = -4,39$
- Amortissements constants : $S = -2,71$
- Annuités constantes : $S = -2,79$

En multipliant chacune des valeurs de S par di , c'est-à-dire par 0,01%, on retrouve alors les valeurs de dP/P de la dernière colonne du tableau ci-dessus :

- Remboursement in fine : $dP/P = -4,39 \times 0,01\% = -0,0439\%$
- Amortissements constants : $dP/P = -2,71 \times 0,01\% = -0,0271\%$
- Annuités constantes : $dP/P = -2,79 \times 0,01\% = -0,0279\%$

5. Détermination du prix P' de l'obligation lorsque le taux de référence est de 3,9%.

P' correspond à la somme des annuités futures actualisées perçues par l'acquéreur du titre, le taux d'actualisation étant 3,9%.

A la date d'acquisition, le 10/02/2009, il reste 4 paiements à obtenir :

- Au 08/04/2009, soit dans 57 jours soit dans 57/365 année = 0,16 année
- Au 08/04/2010, soit dans 1 an + 57 jours soit dans 1,16 année
- Au 08/04/2011, soit dans 2 ans + 57 jours soit dans 2,16 année
- Au 08/04/2012, soit dans 3 an + 57 jours soit dans 3,16 année

On a alors :

Taux de référence		3,90%	
Date	Période actualisation	CF _t	CF _t actualisé
08/04/2009	0,16	1 350 000	1 341 958
08/04/2010	1,16	1 350 000	1 291 586
08/04/2011	2,16	1 350 000	1 243 105
08/04/2012	3,16	31 350 000	27 784 088
Total		35 400 000	31 660 738
Par obligation			1 055

NB : le prix P' par obligation (1 055 €) set obtenu en divisant la valeur de l'ensemble de l'emprunt obligataire (31 660 738 €) par le nombre d'obligations émises (30 000)

6. Détermination du TAB de lorsque le prix de l'obligation s'établit à 1 085 €

Le TAB est le taux d'actualisation qui permet d'égaliser :

- D'une part la valeur de l'obligation (1 085 €)
- D'autre part la somme des flux de trésorerie (45 €, 45 €, 45 € et 1 045 €) actualisés à ce taux que l'obligation procure à l'obligataire.

Ainsi, le TAB vérifie :

$$1085 = \frac{45}{(1 + TAB)^{0,16}} + \frac{45}{(1 + TAB)^{1,16}} + \frac{45}{(1 + TAB)^{2,16}} + \frac{1045}{(1 + TAB)^{3,16}}$$

Cette équation peut être résolue en utilisant la fonction TRI.PAIEMENTS d'Excel.

Sur la base des cellules ci-après :

	A	B	C
1	Prix de revente		1 085
2	Date	Période actualisation	CF _t
3	10/02/2009		(1 085)
4	08/04/2009	0,16	45
5	08/04/2010	1,16	45
6	08/04/2011	2,16	45
7	08/04/2012	3,16	1 045
8			
9	TAB		2,91%

TAB = TRI.PAIEMENTS(C3:C7 ; A3:A7)

NB : on utilise TRI.PAIEMENTS et non TRI car l'écart entre chacun des flux n'est pas toujours égal à 1 an. En effet : entre le 10/02/2009 (1^{er} flux = investissement = flux négatif car il s'agit d'une décaissement pour l'obligataire) et le 04/04/2009 (2^o flux = perception des premiers intérêts par l'obligataire), il y a seulement 16% d'année.

7. Calcul du TAB

Excel fournit : TAB = 2,91%

Exercice 4

1. Calcul de la VAN du projet d'investissement

On sait que :

$$VAN = -I_0 + \sum_{t=1}^n \frac{CF_t}{(1+K)^t} \text{ où :}$$

- CF_t = cash flow (ou flux de trésorerie) perçu l'année t = 1 000 000 €
- K = taux d'actualisation = 10% = 0,1
- I_0 = investissement initial = 3 000 000 €
- n = horizon de l'investissement = 8 ans

Ainsi :

$$VAN = -3\,000\,000 + \sum_{t=1}^8 \frac{1\,000\,000}{(1+10\%)^t} = -3\,000\,000 + 1\,000\,000 \cdot \frac{1 - (1+0,1)^{-8}}{0,1} = 2\,334\,926 \text{ €}$$

Ce montant étant positif, l'investissement peut être envisagé favorablement.

2. Expression du TIR ou TRI

Le TIR est le taux d'actualisation qui permet d'égaliser :

- D'une part le montant de l'investissement (3 M€)
- D'autre part la somme des flux de trésorerie (1 M€) actualisés à ce taux que le projet va générer dans le futur

Ainsi, le TIR vérifie :

$$I_0 = \sum_{t=1}^n \frac{CF_t}{(1 + TIR)^t}$$

Ici :

$$3\,000\,000 = \sum_{t=1}^8 \frac{1\,000\,000}{(1 + TIR)^t} = 1\,000\,000 \cdot \frac{1 - (1 + TIR)^{-8}}{TIR}$$

D'un point de vue syntaxique sous Excel, sur la base des cellules ci-dessous :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Année	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	CF	(3 000 000)	1 000 000	1 000 000	1 000 000	1 000 000	1 000 000	1 000 000	1 000 000	1 000 000
3	CF actualisé	(3 000 000)	909 091	826 446	751 315	683 013	620 921	564 474	513 158	466 507
4	VAN	2 334 926								
5										
6	Calcul direct par Excel	2 334 926								
7										
8	TIR		29%							

TIR = TRI(B2:J2 ; 0,1)

3. Calcul du TIR ou TRI

Excel fournit : TIR = 29%