Mathématiques financières

Olivier Levyne (2009)

1. Introduction

a. La valeur de marché d'un titre financier

La valeur d'un titre correspond à la somme des flux de trésorerie actualisés qu'il doit procurer à son propriétaire.

b. Intérêt simple versus intérêt composé

La renonciation à l'utilisation immédiate de la trésorerie disponible conduit les agents économiques à exiger une rémunération de leur épargne. Cette rémunération est obtenue dans le cadre d'un placement financier qui porte intérêt.

Deux modes de calcul de la rémunération sont envisageables : d'une part l'intérêt simple (pour les placements d'une durée maximale d'un an) qui est étudié dans le paragraphe 2. et illustré par un cas de valorisation d'un titre de créance négociable, d'autre part l'intérêt composé (pour les placements à plus d'un an, par exemple en actions ou en obligations). L'étude de l'intérêt composé est introduit dans le paragraphe 3 et est développé dans le reste du cours.

La notion d'intérêt composé est également utilisée pour déterminer le montant des paiements contants d'un emprunteur à moyen ou long terme. C'est le cas, par exemple, d'un crédit immobilier sur 20 ans.

2. L'intérêt simple

a. Valeur future par capitalisation

Lorsqu'une somme d'argent est placée pendant une durée maximale d'un an, la rémunération est calculée selon le principe de l'intérêt simple : les interêts sont, en principe, payés en une seule fois lorsque les fonds sont remboursés à l'investisseur.

Le taux d'intérêt annoncé à l'investisseur est un taux nominal, nécessairement annuel. Si la durée du placement est d'un an, alors la rémunération est égale au produit du taux nominal par le montant du placement. En revanche, si la durée du placement est inférieure à un, il convient de calculer une rémunération proportionnelle à cette durée. Ainsi, si la durée du placement est d'un mois, il est légitime que la rémunération soit 12 fois plus faible que la rémunération d'un placement sur un an.

Pour les opérations de trésorerie (placements et emprunts d'une durée maximale d'un an), les banques considèrent une année de 360 jours. Seules les banques de Grande Bretagne et des anciens pays du Commonwealth font l'hypothèse d'une année de 365 jours.

Soit V_0 le montant placé au taux nominal i pendant n jours et V_n la valeur du patrimoine de l'investisseur au bout de n jours. V_n porte ne nom de valeur acquise.

$$V_n = V_0 + i.V_à \cdot \frac{n}{360}$$

Donc :

$$\boxed{V_n = V_0(1 + \frac{ni}{360})}$$

b. Valeur présente par actualisation

Inversement, si l'on connaît la valeur acquise V_n d'un placement au bout de n jours, il est possible d'en déduire sa valeur actuelle (ou valeur actualisée) V_0 :

$$\boxed{V_0 = \frac{V_n}{1 + \frac{ni}{360}}}$$

On peut en déduire :

- Le rendement (annualisé) i d'un placement pendant n jours ; i vérifie :

$$\boxed{i = \frac{360}{n}(\frac{V_n}{V_0} - 1)}$$

- La durée en jours n qui permet à un capital initial V_0, placé au taux nominal (nécessairement annuel) i, de devenir V_n. En inversant les places de i et n dans l'égalité ci-dessus, n vérifie :

$$\boxed{n = \frac{360}{i}(\frac{V_n}{V_0} - 1)}$$

Ces formules sont notamment utilisées pour valoriser des titres de créances négociables (TCN). Ces titres sont émis par des entreprises qui souhaitent s'endetter sans recourir à l'endettement bancaire. Dans ce cas, elles se tournent vers des investisseurs (particuliers, entreprises, SICAV, fonds communs de placements…) qui disposent d'excédents de liquidités qu'ils souhaitent placer pendant une période correspondant à la durée du besoin de financement de l'entreprise émettrice.

Ces titres ne sont pas cotés sur un marché organisé. L'investisseur peut toutefois revendre son TCN s'il a besoin de récupérer ses liquidités avant la date d'échéance de son placement. Dans ce cas, le prix de revente du titre est déterminé par une méthode de marché décrite dans l'exemple ci-après. Le nom du TCN varie selon le type d'émetteur :

- billet de trésorerie (commercial paper) lorsque l'émetteur est une entreprise industrielle ou commerciale ;

- certificat de dépôt (certificate of deposit) lorsque l'émetteur est une banque ;

- Bon du Trésor (Treasury Bill) lorsque l'émetteur est l'Etat.

c. Relation taux requis-valeur dans le cas de l'intérêt simple (application à la valorisation des titres de créances négociables)

Un investisseur qui dispose de 1 M€ de liquidités à placer pour 3 mois achète un billet de trésorerie émis par la société S. Les caractéristiques du titre sont les suivantes :

- *Valeur nominale : 1 M€ :*
  - *Il s'agit du montant; emprunté par la société S*
  - *C'est donc la somme qui devra être remboursée à la date d'échéance ;*

- *Taux facial : 5%*
  - *Ce taux est également appelé taux nominal*
  - *C'est le taux sur la base duquel les intérêts seront payés à la date d'échéance par la société S au porteur du billet de trésorerie. Quelle que soit l'évolution des taux d'intérêt sur le marché monétaire, la rémunération du placement est calculée sur la base de ce taux de 5% ;*

- *Durée de vie : 3 mois.*
  - *On parle également de maturité de 3 mois*
  - *Cela signifie que la date d'échéance du billet de trésorerie se situe 3 mois après sa date d'émission.*

Au bout d'un mois, des besoins de liquidités conduisent l'investisseur à revendre le billet de trésorerie. A cette date, le taux de référence du marché monétaire est de 6%. On se propose de déterminer le prix auquel le billet peut être revendu et le rendement effectif du placement.

a) Détermination montant perçu par S si le TCN est conservé jusqu'à l'échéance

Soit V_n le montant perçu par l'investisseur si le TCN est conservé jusqu'à l'échéance.

V_n correspond au remboursement du principal augmenté des intérêts dus au titre du placement pendant 3 mois et calculés selon le principe de l'intérêt simple. En d'autres termes, à l'échéance, l'investisseur reçoit une somme égale à la capitalisation au taux de 5% (pro-ratisé sur 90 jours) de son capital initial de 1 000 000 €. Ainsi :

$$V_n = 1000000.\left(1+\frac{5\% x 90}{360}\right) = 1\,012\,500 \text{ €}$$

b) Détermination du prix de revente du TCN au bout d'un mois

Soit P ce prix de revente au bout d'un mois.
P doit être fixé de telle sorte que le rendement qui sera procuré à l'acheteur soit le même que celui qu'il obtiendrait à partir d'un placement sur le marché monétaire (soit 6%) sur la même période que celle qui reste jusqu'à l'échéance (soit 60 jours).

En outre, dans la mesure où la société émettrice du TCN verse au porteur du titre la somme de 1 012 500 (déterminée au paragraphe précédent), P vérifie:

$$P.\left(1+\frac{6\% x 60}{360}\right) = 1\,012\,500.$$

Donc :

$$P = \frac{1012500}{1+\frac{6\% x 60}{360}} = 1\,002\,475 \text{ €}$$

c) Détermination du taux de rendement du placement pendant 1 mois

Le souscripteur a finalement placé 1 000 000 € pendant 30 jours et récupéré 1 002 475 € en revendant le TCN. Soit i le rendement de son placement ; i vérifie :

$$1000000(1+\frac{30i}{360}) = 1\,002\,475$$

Donc :

$$i = \frac{360}{30}(\frac{1002475}{1000000}-1) = 2{,}97\%.$$

La hausse des taux conduit le souscripteur à obtenir un rendement plus faible que celui qu'il aurait obtenu en conservant son titre jusqu'à l'échéance.

En revanche, si à la date d'échéance le taux de référence avait été ramené à 4%, le prix *P'* de revente du TCN aurait vérifié :

$$P' x \left(1+\frac{4\% x 60}{360}\right) = 1\ 012\ 500.$$

Donc : $P' = \dfrac{1012500}{1+\dfrac{4\% x 60}{360}} = 1\ 005\ 795$ €

Soit *i'* le rendement du placement ; *i'* vérifie :

$$1000000(1+\frac{30i}{360}) = 1\ 005\ 795$$

Donc : $i' = \dfrac{360}{30}(\dfrac{1005795}{1000000}-1) = 6{,}95\%.$

La baisse des taux profite au souscripteur qui obtient ainsi un rendement plus élevé en revendant son TCN qu'en le conservant jusqu'à l'échéance.

En résumé (formalisé) :

- Le souscripteur (à l'émission) d'un TCN pour un montant V_0 récupérera, à l'échéance ce montant augmenté des intérêts *pro rata temporis*. Pour un TCN d'une durée de vie de n jours et un taux nominal i, la somme V_n versée, à l'échéance, par l'entreprise émettrice sera : $V_n = V_0(1+\frac{ni}{360})$
- Si le souscripteur doit revendre le TCN au bout de n_1 jours, soit n- n_1 jours avant l'échéance, la valeur de marché du titre s'établit à un montant M. Ce montant M doit permettre à l'acquéreur d'obtenir, un rendement j correspondant au taux de référence du marché monétaire. En d'autres termes, s'il conserve le TCN jusqu'à l'échéance, il doit obtenir un rendement équivalent à celui qu'il obtiendrait en allant sur le marché primaire, c'est-à-dire en souscrivant à l'émission d'un nouveau TCN (dont le taux facial serait fondé sur les nouvelles conditions du marché monétaire). Ainsi : $M.(1+\frac{(n-n_1).j}{360}) = V_n$ donc : $M = \frac{V_n}{1+\frac{(n-n_1).j}{360}}$. Le prix de revente du TCN est donc égal à la valeur actualisée du montant versé par l'émetteur à l'échéance, le taux d'actualisation étant le taux de référence j du marché monétaire. Ce taux j étant au dénominateur, toute hausse du taux (du marché monétaire) se traduit donc par une baisse de la valeur du titre.
- Pour le souscripteur (à l'émission) qui aura finalement conservé seulement n_1 jours son titre (payé V_0 et revendu M), le rendement k effectif du placement vérifie : $k = \frac{360}{n}(\frac{M}{V_0}-1)$. En revanche, s'il avait conservé sont titre jusqu'à l'échéance, son rendement aurait été égal à $\frac{360}{n}(\frac{V_n}{V_0}-1) = \frac{360}{n}(\frac{V_0(1+\frac{ni}{360})}{V_0}-1) = \frac{360}{n}(1+\frac{ni}{360}-1) = i$

3. L'intérêt composé

Le principe de l'intérêt composé est utilisé pour les placements et les emprunts dont la date d'échéance est dans plus d'un an. Dans ce cas, les intérêts générés chaque année portent intérêt à leur tour. On parle alors de capitalisation ou de composition des intérêts.

a. Valeur future par capitalisation

Soit V_0 le montant placé au taux nominal i pendant n années et V_n la valeur du patrimoine de l'investisseur au bout de n années. V_n porte ne nom de valeur acquise.

$V_1 = V_0 + i.V_0 .= (1+i).V_0$

$V_2 = V_1 + i.V_1 .= (1+i).V_1 = (1+i).(1+i).V_0 = (1+i)^2.V_0$

.

.

.

$$\boxed{V_n = (1+i)^n.V_0}$$

A titre d'exemple, le placement d'une somme de 15 000 € sur un livret A pendant 4 ans à 3% permet de porter le patrimoine de l'investisseur de V_0 = 15 000 à :

V_4 = 15 000. $(1+3\%)^4$ = 15 000.1,03^4 = 16 883 € dont 15 000 € de remboursement du capital (ou du principal) et 16 883 – 15 000 = 1 883 € d'intérêt

b. Valeur présente par actualisation

Inversement, si l'on connaît la valeur acquise V_n d'un placement au bout de n jours, il est possible d'en déduire sa valeur actuelle (ou valeur actualise) V_0 :

$$\boxed{V_0 = \frac{V_n}{(1+i)^n}}$$

La construction de plans de remboursement des crédits s'inscrit dans cette logique d'intérêts composés.

c. Annuités constantes

On cherche à de déterminer V_0 qui vérifie :

$$V_0 = \quad \frac{a}{1+i} + \frac{a}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{a}{(1+i)^n} = \sum_{t=1}^{n} \frac{a}{(1+i)^t} = a\sum_{t=1}^{n} (1+i)^{-t} = a\sum_{t=1}^{n} \left[(1+i)^{-1}\right]^t$$

Or la somme des n premiers termes d'une suite géometrique de raison égale à q s'écrit :

$$\boxed{\sum_{t=1}^{n} q^{t} = q\frac{1-q^{n}}{1-q}}$$

Donc, en remplaçant q par $(1+i)^{-1}$, on a :

$$V = a(1+i)^{-1}.\frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-1}} = \frac{a}{1+i}.\frac{1-(1+i)^{-n}}{1-\frac{1}{1+i}} = \frac{a}{1+i}.\frac{1-(1+i)^{-n}}{\frac{1+i-1}{1+i}} = \frac{a}{1+i}.\frac{1-(1+i)^{-n}}{\frac{i}{1+i}}$$

Finalement

$$\boxed{V = a.\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

<u>Application à la valorisation d'une obligation</u>

L'endettement à long terme d'une entreprise peut prendre deux formes :

- L'emprunt indivis lorsque le créancier est unique : il s'agit alors d'une banque (ou d'un syndicat bancaire)
- L'émission d'obligation lorsqu'il existe une pluralité de prêteurs. Ceux-ci détiennent alors des obligations, généralement négociables en bourse.

La valeur de l'obligation correspond à la somme des flux de trésorerie actualisés que ce titre doit procurer, dans le futur à son propriétaire, à savoir des intérêts et la valeur de remboursement.

Exemple

Un investisseur souscrit à l'émission d'une obligation dont les caractéristiques sont les suivantes :

- *Nominal : 1 000 €*
- *Taux nominal (ou taux facial)fixe : 5%*
- *Remboursement dans 3 ans.*

Vérifier que, lors de son introduction en bourse, la valeur de l'obligation est bien de 1 000 €
Immédiatement après l'émission de l'obligation, le taux de référence du marché obligataire (TMO) est porté à 6%. A quel niveau de prix s'établit le cours de l'obligation ?

L'obligation représente un crédit de 1 000 € à 5%. Par conséquent, l'obligataire reçoit, à la fin de chaque année, un « coupon » (ou versement d'intérêts) de 1000 x 5% = 50 €
Soit V la valeur de l'obligation. V vérifie :

$$V = \frac{50}{1+5\%} + \frac{50}{(1+5\%)^2} + \frac{50+1000}{(1+5\%)^3}$$
$$= \frac{50}{1+5\%} + \frac{50}{(1+5\%)^2} + \frac{50}{(1+5\%)^3} + \frac{1000}{(1+5\%)^3} = \sum_{t=1}^{3} \frac{50}{(1+5\%)^t} + \frac{1000}{(1+5\%)^3}$$
$$= 50.\frac{1-(1+5\%)^{-3}}{5\%} + \frac{1000}{(1+5\%)^3}$$

= 1 000 €

Si le TMO est porté à 6%, la valeur V' de l'obligation est obtenue en actualisant les flux futurs (intérêts et remboursement) à 6% (au lieu de 5%). Les intérérêts de 50 € sont, par ailleurs, inchangés, dans l'hypothèse où l'obligation est supposée être « à taux fixe ». Dans ce cas :

$$V = = 50.\frac{1-(1+6\%)^{-3}}{6\%} + \frac{1000}{(1+6\%)^3}$$

= 973 €

Par conséquent, une hausse du TMO de 1% se traduit par une baisse de 1000-973 =27 € soit une baisse de 27/1000 = 2,7%.

Ce résultat permet de souligner la sensibilité de la valeur de l'obligation aux variations de taux d'intérêt et d'illustrer qu'une hausse des taux (ici de 1%) se traduit par une baisse de la valeur du titre (ici de 2,7%).

d. Amortissement d'un crédit

Trois modalités de remboursement des crédits sont envisageables pour les entreprises qui ont recours à l'endettement : le remboursement in fine, le remboursement par amortissements constants et les paiements constants, généralement sous forme d'annuités. En revanche, les crédits à l'habitat souscrits par les particuliers sont exclusivement remboursables sous forme de paiements mensuels constants (ou mensualités) qui intègrent des intérêts et un remboursement partiel du crédit.

Dans tous les cas, les intérêts sont calculés en appliquant le taux d'intérêt au montant restant à rembourser. Le remboursement du crédit, total ou partiel, porte également le nom d'amortissement. Le montant restant à rembourser à la fin d'une période est égal à la différence entre d'une part le montant restant à rembourser à l'issue de la période précédente, d'autre part l'amortissement qui vient d'être réalisé. Lorsque le paiement des intérêts est annuel, le montant égal à la somme des intérêts et de l'amortissement du principal s'appelle l'annuité.

- ***Remboursement in fine***

On dit qu'un crédit est remboursé in fine lorsque la totalité de son montant est amorti à la date d'échéance. Par conséquent, le montant restant à rembourser, chaque année, est le même. Ainsi, les intérêts sont identiques chaque année.

Exemple : mise en place d'un crédit de 1 M€ remboursable in fine dans 5 ans, le taux d'intérêt nominal étant de 4%. Dans ce cas, le montant restant à rembourser chaque année est de 1 M€ et les intérêts sont de 1 000 000 x 4% = 40 000 €. Par conséquent, le montant des 4 premières annuités est de 40 000 €.

Au bout de 5 ans, l'emprunteur devra rembourser 1 M€ en plus des intérêts qu'il aura payés chaque année, y compris la dernière année. Le plan d'amortissement du crédit est alors le suivant :

Année	Reste à rembourser	Intérêts	Amortissements	Annuités
1	1 000 000	40 000	0	40 000
2	1 000 000	40 000	0	40 000
3	1 000 000	40 000	0	40 000
4	1 000 000	40 000	0	40 000
5	1 000 000	40 000	1 000 000	1 040 000

- ***Remboursement par amortissements constants***

On parle de crédit à amortissements constants lorsque le montant de chaque remboursement est égal au montant de l'emprunt rapporté à sa maturité. La diminution du montant restant à rembourser, à l'issue de chaque amortissement, conduit à une décroissance des intérêts.

Exemple : mise en place d'un crédit de 1 M€ remboursable sur 5 ans par amortissements constants, le taux d'intérêt nominal étant de 4%. Dans ce cas, l'amortissement annuel est de

$$\frac{1000000}{5} = 200000€$$

Le montant restant à rembourser est donc :

- A la fin de la première année de 1 000 000 €
- A la fin de la deuxième année de 1 000 000 –200 000 = 800 000 €…

Les intérêts dus sont donc :

- A la fin de la première année de 1 000 000 x 4% = 40 000 €
- A la fin de la deuxième année de 800 000 x 4% = 32 000 €…

Le plan d'amortissement du crédit est alors le suivant :

Année	Reste à rembourser	Intérêts	Amortissements	Annuités
1	1 000 000	40 000	200 000	240 000
2	800 000	32 000	200 000	232 000
3	600 000	24 000	200 000	224 000
4	400 000	16 000	200 000	216 000
5	200 000	8 000	200 000	208 000

- ***Remboursement par annuités constantes***

Un crédit est remboursé par annuités constantes lorsque les montants des paiements annuels (qui regroupent les intérêts et les amortissements) sont constants. Dans la mesure où le montant restant à rembourser diminue sous l'effet des amortissements, les intérêts diminuent chaque année. Aussi, dans la mesure où les annuités sont constantes, les amortissements sont progressifs.

Le montant de l'emprunt et des annuités constantes sont respectivement notés *V* et *a* ci-après. En outre, le taux d'intérêt nominal est noté *i* et la durée (ou maturité) du crédit est supposée égale à *n* années.

Pour déterminer la valeur de *a*, il convient de partir du principe selon lequel, pour le créancier (la banque en général), le montant du crédit correspond à la somme des annuités (constantes) actualisées au taux i qui vont être perçues. Ainsi :

$$V = \sum_{t=1}^{n} \frac{a}{(1+i)^t} = a.\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Donc :

Exemple : mise en place d'un crédit de 1 M€ remboursable sur 5 ans par annuités constantes, le taux d'intérêt nominal étant de 4%. Dans ce cas, l'annuité constante est :

$$a = \frac{1000000x4\%}{1-(1+4\%)^{-5}}$$

Donc : *a* = 224 627 €.

A la fin de la première année :

- Le montant restant à rembourser est de 1 000 000 €, donc les intérêts sont de 1 000 000 x 4%= 40 000 €
- L'amortissement correspond à la différence entre l'annuité et les intérêts soit : 224 627-40 000 = 184 627 €

Par conséquent, à la fin de la deuxième année :

- Le montant restant à rembourser sera ramené à 1 000 000-184 627 = 815 373 €, donc les intérêts sont de 815 373 x 4%= 32 615 €
- L'amortissement correspond à la différence entre l'annuité et les intérêts soit : 224 627-32 615 = 192 012 €

Le plan d'amortissement du crédit est alors le suivant :

Année	Reste à rembourser	Intérêts	Amortissements	Annuités
1	1 000 000	40 000	184 627	224 627
2	815 373	32 615	192 012	224 627
3	623 361	24 934	199 693	224 627
4	423 668	16 947	207 680	224 627
5	215 988	8 640	215 988	224 627

Pour vérifier que le plan d'amortissement est exact, il convient de s'assurer que le dernier amortissement (215 988 € dans le présent exemple) est bien égal au montant restant à rembourser pour le dernière année (ce qui est le cas ici).

4. Taux équivalent annuel ou taux actuariel

Pour comparer deux conditions d'emprunt ou de placement dont l'échéancier prévoit des périodicités de paiement différentes, il convient de déterminer le taux d'intérêt qui aura été annoncé dans le cadre de paiements annuels. On détermine alors le taux équivalent annuel ou taux actuariel, qui est noté *r* ci-après.
Soit *i* le taux nominal (nécessairement annuel) pour des paiements effectués selon une périodicité *n* fois plus petite que l'année.
Soit *M* un montant placé pendant un an. Il doit être équivalent de placer *M* pendant un an :

- au taux *r*. Dans ce cas, l'investisseur reçoit des intérêts seulement au bout d'un an
- au taux *i*. Dans ce cas, l'investisseur reçoit des intérêts à la fin de chacune des *n* périodes qui sont à leur tour placés afin de porter intérêt. Les intérêts perçus à la fin de chaque période sont calculés sur la base du taux *i/n*.

Dès lors :

$$M(1+r) = M(1+\frac{i}{n})^n$$

En simplifiant par M, on obtient la formule du taux équivalent annuel ou taux actuariel :

$$1+r = (1+\frac{i}{n})^n$$

<u>Exemple de comparaison de plusieurs offres de crédit</u>

Une entreprise s'adresse aux trois banques A, B et C en vue d'obtenir un crédit de 1 M€ sur 10 ans. Les conditions proposées par les 3 banques sont résumées dans le tableau ci-dessous

Banque	A	B	C
Taux nominal	5,03%	5,05%	5,10%
Périodicité des paiements	Mensuelle	Trimestrielle	Annuelle

Quelle offre est-il opportun de retenir ?

Pour comparer chacune de ces offres, il convient de déterminer le taux équivalent annuel ou taux actuariel, c'est-à-dire le taux qui aurait été affiché par chacune des banques pour des paiements annuels. Soit r_x ce taux pour la banque *x* :

- $$1+r_A = (1+\frac{5{,}03\%}{12})^{12} \Leftrightarrow r_A = (1+\frac{5{,}03\%}{12})^{12} - 1 = 0{,}05148 = 5{,}148\%$$
- $$1+r_B = (1+\frac{5{,}05\%}{4})^{4} \Leftrightarrow r_B = (1+\frac{5{,}05\%}{4})^{4} - 1 = 0{,}05146 = 5{,}146\%$$

Enfin, r_C =5,10%

Par conséquent : $r_C < r_B < r_A$
En d'autres termes, il convient de privilégier un emprunt auprès de C.

5. Calculs de paiements constants

Dans les exemples de la 3° partie, la périodicité des paiements était supposée annuelle. Les paiements peuvent toutefois être plus fréquents : ils peuvent, en effet, être semestriels, trimestriels et surtout mensuels pour les particuliers. Il est même possible d'imaginer, à titre purement illustratif des paiements quotidiens.

En tout état de cause, la banque annonce à l'emprunteur un taux nominal, nécessairement annuel. Le taux d'intérêt qu'il convient d'appliquer au montant restant à rembourser pour obtenir le montant des intérêts est alors un taux proportionnel au taux nominal *i*. Dès lors, le taux utilisable dans le cadre de paiements effectués à des intervalles de temps *n* fois plus petits que l'année est *i/n*

- si les paiements sont semestriels, le taux semestriel (qui devra être appliqué chaque semestre au montant restant à rembourser) est égal au taux nominal divisé par 2 ;
- si les paiements sont trimestriels, le taux trimestriel (qui devra être appliqué chaque trimestre au montant restant à rembourser) est égal au taux nominal divisé par 4 ;
- si les paiements sont mensuels, le taux semestriel (qui devra être appliqué chaque mois au montant restant à rembourser) est égal au taux nominal divisé par 12 ;
- si les paiements sont quotidiens, le taux quotidien (qui devra être appliqué chaque jour au montant restant à rembourser) est égal au taux nominal divisé par 365.

Pour dresser le plan de remboursement du crédit, il convient alors de reprendre les principes exposés précédemment en remplaçant le taux nominal par le taux proportionnel et en considérant un nombre de périodes égal au nombre de total de paiements prévus.
Ainsi, en notant :

- p : le paiement constant ;
- i : le taux nominal (nécessairement annuel) ;
- n : le nombre de paiement par an ;
- m : la durée en année du crédit,

on a :

$$\boxed{p = \frac{V.(i/n)}{1-(1+\frac{i}{n})^{-n.m}}}$$

Exemple de tableau d'amortissement

Mise en place d'un crédit de 1 M€ remboursable sur 2 ans par mensualités constantes, le taux d'intérêt nominal étant de 4%. On se propose de présenter le tableau d'amortissement par annuités constantes.

Dans ce cas :

- le taux mensuel est de 4%/12 = 0,33% = 0,0033. Donc *i* = 0,33%
- le nombre de paiements mensuels sur 2 ans est égal à 2x12 = 24. Donc ; *n* = 24
- la mensualité constante est :

$$a = \frac{1000000x0{,}33\%}{1-(1+33\%)^{-(12x2)}}$$

Donc : *a* = 43 407 €.

A la fin du premier mois:

- Le montant restant à rembourser est de 1 000 000 €, donc les intérêts sont de 1 000 000x0,33%= 3 300 €
- L'amortissement correspond à la différence entre l'annuité et les intérêts soit :
  43 407-3 300 = 40 107 €

Par conséquent, à la fin du deuxième mois :

- Le montant restant à rembourser sera ramené à 1 000 000-40 107 = 959 893 €, donc les intérêts sont de 959 893x0,33%= 3 168 €
- L'amortissement correspond à la différence entre l'annuité et les intérêts soit :
  43 407-3 168 = 40 239 €…

Le plan d'amortissement du crédit est alors le suivant :

Mois	Reste à rembourser	Intérêts	Amortissements	Mensualités
1	1 000 000	3 300	40 107	43 407
2	959 893	3 168	40 239	43 407
3	919 653	3 035	40 372	43 407
4	879 281	2 902	40 505	43 407
5	838 776	2 768	40 639	43 407
6	798 136	2 634	40 773	43 407
7	757 363	2 499	40 908	43 407
8	716 455	2 364	41 043	43 407
9	675 413	2 229	41 178	43 407
10	634 234	2 093	41 314	43 407
11	592 920	1 957	41 450	43 407
12	551 470	1 820	41 587	43 407
13	509 882	1 683	41 725	43 407
14	468 158	1 545	41 862	43 407
15	426 296	1 407	42 000	43 407
16	384 295	1 268	42 139	43 407
17	342 156	1 129	42 278	43 407
18	299 878	990	42 418	43 407
19	257 461	850	42 557	43 407
20	214 903	709	42 698	43 407
21	172 205	568	42 839	43 407
22	129 367	427	42 980	43 407
23	86 386	285	43 122	43 407
24	43 264	143	43 264	43 407

6. Le taux effectif global

Désormais, l'emprunteur dispose, dans l'offre de crédit qui lui est faite, d'une information précise sur le coût réel de son crédit. Ce coût correspond au taux effectif global ou TEG qui intègre de façon synthétique à la fois les frais de dossier, mais aussi les intérêts et les assurances (obligatoires et facultatives) que l'emprunteur va être amené à payer pendant toute la durée de son emprunt.

D'un point de vue pratique, le TEG est le taux d'actualisation j qui permet d'égaliser :

- d'une part le montant effectivement mis à la disposition de l'emprunteur. Ce montant noté M correspond au crédit mis en place dont le frais de dossier doivent être déduits
- d'autre part la somme des n flux de paiements futurs (y compris les assurances) actualisés à ce taux. Soit FP_t le flux de paiement prévu à la date t.

Par conséquent, j vérifie :

$$M = \sum_{t=1}^{n} \frac{FP_t}{(1+j)^t}$$

Exemple

Un particulier se voit proposer un crédit de 100 000 € remboursable sur 3 ans par trimestrialités constantes. Le taux nominal est de 11%

1. *Calculer le taux trimestriel et la trimestrialité constante*
2. *Le taux d'assurance décès invalidité est de 0,66%. Dresser le tableau d'amortissement du crédit*
3. *Les frais de dossier sont de 1%. Ecrire la formule de l'équation à résoudre pour déterminer le TEG trimestriel*
4. *Vérifier que le TEG trimestriel est de 3,08%*
5. *En déduire le TEG équivalent annuel (ou TEG actuariel)*

1. Le taux trimestriel est proportionnel au taux nominal de 11%. Il est donc égal à $\frac{11\%}{4} = 2{,}75\%$. La trimestrialité constante p est alors égale à :

$$p = \frac{100.000 x 2{,}75\%}{1-(1+2{,}75\%)^{-4x3}} = 9897€$$

2. Le taux d'ADI de 1% annoncé par la banque est nominal donc nécessairement annuel. Le taux d'ADI trimestriel est donc de $\frac{11\%}{4} = 2{,}75\%$ Le tableau d'amortissement est donc le suivant :

Remboursement par trimestrialités constantes						
Trimestre	Reste à rembourser	Intérêts	Amortissements	Trimestrialités	ADI	Paiement total
(Montant mis à disposition)						(99 000)
1	100 000	2 750	7 147	9 897	165	10 062
2	92 853	2 553	7 343	9 897	153	10 050
3	85 510	2 352	7 545	9 897	141	10 038
4	77 964	2 144	7 753	9 897	129	10 026
5	70 212	1 931	7 966	9 897	116	10 013
6	62 245	1 712	8 185	9 897	103	10 000
7	54 060	1 487	8 410	9 897	89	9 986
8	45 650	1 255	8 641	9 897	75	9 972
9	37 009	1 018	8 879	9 897	61	9 958
10	28 130	774	9 123	9 897	46	9 943
11	19 006	523	9 374	9 897	31	9 928
12	9 632	265	9 632	9 897	16	9 913
Total			100 000	118 762	1 126	119 888

3. et 4. Les frais de dossiers sont de 1% x 100 000 = 1 000 €. Le montant mis à disposition de l'emprunteur est donc de 100 000 – 1 000 = 99 000 €. Soit i le TEG trimestriel ; i vérifie :

$$99.000 = \frac{10.062}{(1+i)^1} + \frac{10.050}{(1+i)^2} + ... + \frac{9.913}{(1+i)^{12}}$$ soit encore :

$$-99.000 + \frac{10.062}{(1+i)^1} + \frac{10.050}{(1+i)^2} + ... + \frac{9.913}{(1+i)^{12}} = 0$$

Cette équation est vérifiée pour i = 3,08%.
Pour déterminer i sous Excel, il convient d'utiliser la fonction TRI. Dans ce cas, on sélectionne l'ensemble des flux de la dernière colonne du tableau d'amortissement qui vont de de -99 000 à 9 913 € et on entre un pourcentage au hasard, par exemple 10% (ou 0,1) pour permettre à Excel de réaliser les itérations nécessaires au calcul de i.
D'un point de vue syntaxique, la formule est :
i = TRI(-99000 :9913 ;0,1) et on obtient alors 3,08%

5 . Soit r le TEG équivalent annuel. La formule du taux équivalent est : $1 + r = (1 + \frac{i}{n})^n$

où i est un taux nominal, donc nécessairement annuel et n le nombre de paiements par an. Ainsi, pour des paiements trimestriels, *i/n* est le taux trimestriel. Par conséquent, ici, le TEG trimestriel de 3,08% correspond à *i/n*. Ainsi, r vérifie :

$1 + r = (1 + 3{,}08\%)^4$ donc : r = $1{,}0308^4$-1 = 12,92%

7. Relation taux requis-valeur dans le cas de l'intérêt composé

a. Notion d'obligation

L'entreprise qui souhaite s'endetter à long terme peut se tourner vers deux catégories de pourvoyeurs de fonds :

- les banques. Dans ce cas, l'entreprise contracte un emprunt indivis ;
- les obligataires. Dans ce cas, l'entreprise s'endette auprès d'une pluralité de prêteurs en émettant des obligations.

Le remboursement des obligations est généralement in fine. L'émetteur peut toutefois prévoir, comme pour un emprunt indivis, un remboursement par amortissements constants ou par annuités constantes. Dans ces 2 derniers cas, l'émetteur tire au sort, chaque année, les obligations qui seront remboursées. Ce nombre correspond au montant amorti (c'est-à-dire remboursé) au cours de l'exercice considéré rapporté à la valeur nominale de l'obligation.

Exemple

Emprunt obligataire de 15 M€ composé de 15 000 obligations dont la valeur nominal est de 1 000 €. Le taux facial est de 10% et la durée de vie de l'emprunt est de 10 ans. On se propose de présenter les tableaux d'amortissement et le nombre d'obligations remboursées chaque année dans les 3 cas suivants :

- *remboursement in fine*
- *remboursement par amortissements constants*
- *remboursement par annuités constantes*

Remboursement in fine					
Années	Reste à rembourser	Intérêts	Amortissements	Annuités	Nombre d'obligations remboursées
1	15 000 000	1 500 000	0	1 500 000	0
2	15 000 000	1 500 000	0	1 500 000	0
3	15 000 000	1 500 000	0	1 500 000	0
4	15 000 000	1 500 000	0	1 500 000	0
5	15 000 000	1 500 000	0	1 500 000	0
6	15 000 000	1 500 000	0	1 500 000	0
7	15 000 000	1 500 000	0	1 500 000	0
8	15 000 000	1 500 000	0	1 500 000	0
9	15 000 000	1 500 000	0	1 500 000	0
10	15 000 000	1 500 000	15 000 000	16 500 000	15 000
		TRI	10,0%		

Remboursement par amortissements constants					
Années	Reste à rembourser	Intérêts	Amortissements	Annuités	Nombre d'obligations remboursées
1	15 000 000	1 500 000	1 500 000	3 000 000	1 500
2	13 500 000	1 350 000	1 500 000	2 850 000	1 500
3	12 000 000	1 200 000	1 500 000	2 700 000	1 500
4	10 500 000	1 050 000	1 500 000	2 550 000	1 500
5	9 000 000	900 000	1 500 000	2 400 000	1 500
6	7 500 000	750 000	1 500 000	2 250 000	1 500
7	6 000 000	600 000	1 500 000	2 100 000	1 500
8	4 500 000	450 000	1 500 000	1 950 000	1 500
9	3 000 000	300 000	1 500 000	1 800 000	1 500
10	1 500 000	150 000	1 500 000	1 650 000	1 500
Total		8 250 000	15 000 000	23 250 000	15 000
		TRI	10,0%		

Remboursement par annuités constantes					
Années	Reste à rembourser	Intérêts	Amortissements	Annuités	Nombre d'obligations remboursées
1	15 000 000	1 500 000	941 181	2 441 181	941
2	14 058 819	1 405 882	1 035 299	2 441 181	1 035
3	13 023 520	1 302 352	1 138 829	2 441 181	1 139
4	11 884 691	1 188 469	1 252 712	2 441 181	1 253
5	10 631 979	1 063 198	1 377 983	2 441 181	1 378
6	9 253 996	925 400	1 515 781	2 441 181	1 516
7	7 738 215	773 822	1 667 359	2 441 181	1 667
8	6 070 856	607 086	1 834 095	2 441 181	1 834
9	4 236 760	423 676	2 017 505	2 441 181	2 018
10	2 219 255	221 926	2 219 255	2 441 181	2 219
Total		9 411 809	15 000 000	24 411 809	15 000
		TRI	10,0%		

NB : dans le cas du remboursement par annuité constante, celle-ci est égale à a qui vérifie :

$$a = \frac{15.000.000x10\%}{1-(1+10\%)^{-10}} = 2.441.181€$$

b. Rappel sur l'évaluation d'une obligation à taux fixe

La valeur d'un titre (par exemple une obligation) correspond à la somme des flux de trésorerie actualisés que ce titre procure à son propriétaire. Dans le cas d'une obligation, les flux de trésorerie correspondent au paiement des intérêts et au remboursement (ou à l'amortissement) du principal.

Dans l'hypothèse où l'obligation est remboursée in fine, le montant restant à rembourser est le même chaque année. Par conséquent les intérêts, dont le calcul est fondé sur le montant restant à rembourser, sont constants.

Ainsi, si V_0 désigne la valeur de l'obligation à la date t=0, c'est-à-dire le jour de son émission, V_0 vérifie :

$$V_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{Intérêts}{(1+i)^t} + \frac{Nominal}{(1+i)^n} = Intérêts.\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} + \frac{Nominal}{(1+i)^n}$$

Où n correspond au nombre résiduel d'années de vie de l'obligation.

Exemple

1. *Un investisseur souscrit à une émission obligataire. Il achète 1 obligation assimilable du Trésor (OAT), remboursable in fine, dont le nominal est de 2 000 €, le taux facial de 4% et la durée de vie de 5 ans. Vérifier que, lors de son introduction en bourse, le jour de l'émission, l'obligation cote 2 000 €*
2. *Le taux de référence des OAT est porté, au cours de la première journée de cotation, à 5%. Calculer à combien s'établit le nouveau cours de l'obligation.*
3. *En déduire la perte, en pourcentage, subie par l'investisseur*
4. *Que devient le cours de bourse de l'obligation au bout de 2 ans dans les hypothèses suivantes :*
    a. *Le prix de référence du marché obligataire (TMO) s'est maintenu à 4%*
    b. *Le prix de référence du marché obligataire (TMO) a été porté à 5%*

1. $V_0 = \sum_{t=1}^{5} \frac{2000x4\%}{(1+4\%)^t} + \frac{2000}{(1+4\%)^5} = 80.\frac{1-(1+0{,}04)^{-5}}{0{,}04} + \frac{2000}{(1+0{,}04)^5} = 2000€$

2. L'augmentation du taux de référence conduit les investisseurs à exiger un rendement plus élevé. Les flux futurs reçus par l'obligataire étant constants, l'augmentation du rendement se traduit par une baisse de la valeur du titre. Son nouveau cours est obtenu en modifiant le taux d'actualisation. Ainsi : $V_0 = 80.\frac{1-(1+0{,}05)^{-5}}{0{,}05} + \frac{2000}{(1+0{,}05)^5} = 1913€$

3. La perte est alors de 1913-2000 = -87 € soit $= \frac{-87}{2000} = -4.4\%$

4. Au bout de 2 ans, la durée de vie résiduelle de l'obligation est de 3 ans. Ainsi, en notant V_2 le nouveau cours de l'obligation

a. $V_2 = 80.\frac{1-(1+0{,}04)^{-3}}{0{,}04} + \frac{2000}{(1+0{,}04)^3} = 2000€$

b. $V_0 = 80.\frac{1-(1+0{,}05)^{-5}}{0{,}05} + \frac{2000}{(1+0{,}05)^3} = 1946€$

c. Obligations perpétuelles

Dans l'hypothèse du remboursement d'un crédit d'un montant nominal V par annuités constants a, il a été vu, au paragraphe précédent que :

$$V = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Si le nombre de paiements est infini, on parle de rente perpétuelle. Dans ce cas, si n tend vers l'infini $(1+i)^{-n}$ tend vers 0. Ainsi :

$$V = \frac{a}{i}$$

Les paiements annuels a correspondent uniquement au montant des intérêts. En principe l'obligataire ne sera pas remboursé. Par conséquent, en cas de besoin de liquidités, il devra revendre son titre. Il s'expose ainsi au risque de hausse des taux d'intérêt qui conduit à une baisse de la valeur de son titre.
A noter que l'entreprise émettrice peut prendre l'inititiative de rembourser l'obligation perpétuelle. C'est le cas lorsque, depuis l'émission du titre, le taux d'intérêt de référence (TMO) a baissé. A titre illustratratif, une entreprise a émis en 2005 des titres participatifs au taux facial de 5% pour 1 Md €. En 2009, le taux de référence est ramené à 4%. Dans ce cas, elle s'endette d'1 Md € à 4% et rembourse son emprunt à 5%. Elle reste ainsi endettée d'1 M€ mais paiera désormais des intérêts annuels de 1 000 000 x 4% = 40 K€ et non plus de 50 K€. On dit alors que l'entreprise refinance sa dette.

Exemple

Une obligation perpétuelle a une valeur nominale de 1 000 €. Son taux facial est de 4% et le TMO de 5%. Calculer le prix P de l'obligation

$$P = \frac{1.000x4\%}{5\%} = 800€$$

d. Duration

La duration est la durée moyenne d'attente, en années, pour percevoir les flux d'une obligation dont le prix est *P* et la durée de vie est *n*. Sa formulation, donnée par Macaulay en 1938, est la suivante :

$$\boxed{D = \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{t.CF_1}{(1+i)^t}}{P} = \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{t.CF_t}{(1+i)^t}}{\sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1+i)^t}}}$$

En développant les sommes, on a :

$$D = \frac{1.\frac{CF_1}{(1+i)^1} + 2.\frac{CF_2}{(1+i)^2} + ... + n.\frac{CF_n}{(1+i)^n}}{\frac{CF_1}{(1+i)^1} + \frac{CF_2}{(1+i)^2} + ... + .\frac{CF_n}{(1+i)^n}}$$

$$= \frac{1.\frac{CF_1}{(1+i)^1}}{\frac{CF_1}{(1+i)^1} + \frac{CF_2}{(1+i)^2} + ... + .\frac{CF_n}{(1+i)^n}} + \frac{2.\frac{CF_2}{(1+i)^2}}{\frac{CF_1}{(1+i)^1} + \frac{CF_2}{(1+i)^2} + ... + .\frac{CF_n}{(1+i)^n}} + ... +$$

$$\frac{n.\frac{CF_n}{(1+i)n}}{\frac{CF_1}{(1+i)^1} + \frac{CF_2}{(1+i)^2} + ... + .\frac{CF_n}{(1+i)^n}}$$

La duration est ainsi la moyenne des dates de réception des flux de trésorerie (intérêts et remboursement du principal) pondérée par le poids de chaque flux de trésorerie actualisé dans l'ensemble des flux.

Dans l'hypothèse d'un zéro coupon, c'est-à-dire d'une obligation qui verse l'ensemble des flux (intérêts + remboursement du principal à l'échéance :

$CF_1 = CF_2 = ... = CF_{n-1} = 0$

Dès lors :

$$D = \frac{1.\frac{0}{(1+i)^1} + 2.\frac{0}{(1+i)^2} + ... + n.\frac{CF_n}{(1+i)^n}}{\frac{0}{(1+i)^1} + \frac{0}{(1+i)^2} + ... + .\frac{CF_n}{(1+i)^n}} = \frac{n.\frac{CF_n}{(1+i)^n}}{\frac{CF_n}{(1+i)^n}} = n$$

La durée de vie d'un zéro coupon est donc égale à sa duration.

e. Sensibilité

La sensibilité *S* d'une obligation exprime la variation relative (en %) du prix *P* d'une obligation pour une variation i du taux d'intérêt. Ainsi :

$$S = \frac{\frac{dP}{P}}{di} = \frac{1}{P}\frac{dP}{di} = \frac{1}{P}P'(i)$$

Or :

$$P = \sum_{t=1}^{n}\frac{CF_t}{(1+i)^t} = \sum_{t=1}^{n}CF_t(1+i)^{-t}$$

Ainsi :

$$S = \frac{1}{P}\left[\sum_{t=1}^{n}CF_t(1+i)^{-t}\right]' = -\frac{1}{P}\left[\sum_{t=1}^{n}tCF_t(1+i)^{-t-1}\right] = -\frac{1}{1+i}\frac{1}{P}\left[\sum_{t=1}^{n}tCF_t(1+i)^{-t}\right]$$

$$S = -\frac{1}{1+i}\frac{1}{P}\left[\sum_{t=1}^{n}\frac{tCF_t}{(1+i)^t}\right]$$

Finalement :

$$\boxed{S = -\frac{1}{1+i}.D}$$

Cette formule montre que la sensibilité du prix d'une obligation à la variation du taux d'intérêt est d'autant plus forte que la duration est élevée.
Attention : cette relation est utilisable pour des petites variations du taux d'intérêt de référence (TMO)

<u>Exemple</u>

On considère une obligation dont les caractéristiques sont les suivantes :

1) *Nominal : 1000 €*
2) *Taux facial : 5%*
3) *Durée de vie : 4 ans*
4) *Remboursement in fine*

Le TMO est de 6%.

1. *Calculer la valeur de l'obligation à l'issue de la première journée de cotation, la duration et la sensibilité*
2. *Calculer la valeur de l'obligation si le TMO est porté à 6,1% et vérifier que la variation relative du cours, par rapport à celle de la première question, est cohérente avec la sensibilité*

1. La valeur de l'obligation est la somme des cash flows futurs actualisés à 6% soit 965 €, d'après le tableau ci-dessous.

Date t	CF_t	CF_t actualisé	$t.CF_t$ actualisé
1	50	47	47
2	50	44	89
3	50	42	126
4	1 050	832	3 327
Total		965	3 589

1050 = interet 4em année + remboursement 1

La duration est la somme des $t.CF_t$ actualisés rapportée à la valeur de l'obligation de 965 €. Ainsi, la duration est égale à D tel que :

$$D = \frac{3589}{965} = 3{,}72 ans$$

La sensisbilité S vérifie :

$$S = -\frac{1}{1+6\%}.3{,}72 = -3{,}51$$

2. Si le taux de référence (TMO) est porté à 6,01%, le tableau d'amortissement de l'emprunt obligataire devient :

Date t	CF_t	CF_t actualisé	$t.CF_t$ actualisé
1	50	47	47
2	50	44	89
3	50	42	126
4	1050	829	3 314
Total		962	3 576

La valeur de l'obligation est alors ramenée à 962 € ce qui représente une perte relative de valeur de :

$$\frac{962}{965} - 1 = -0{,}35\%$$

Ce résultat est cohérent avec la sensibilité obtenue. En effet :

$$S = \frac{\frac{dP}{P}}{di}$$

Donc :

$$\frac{dP}{P} = S.di = -3{,}51\% x 0{,}1\% = -0{,}35\%$$

8. Taux continu

a. Rappel du taux équivalent

Il a été vu que si *i* est le taux nominal (nécessairement annuel) annoncé par la banque pour des paiements effectués selon une périodicité *n* fois plus petite que l'année et si r est le taux équivalent annuel ou taux actuariel (c'est-à-dire le taux qui aurait été annoncé par la banque pour des paiements annuels) alors :

$$1+r=(1+\frac{i}{n})^n$$

Exemple : une banque propose un taux nominal de 6% pour un crédit remboursable par mensualités constantes.

1) *Quel est le taux mensuel ?*
2) *Quel taux aurait été annoncé par la banque pour un crédit remboursable par annuités constantes ?*
3) *Quel taux aurait été annoncé par la banque pour un crédit remboursable par trimestrialités constantes ?*

1) Le taux mensuel est proportionnel au taux nominal. Il est donc égal à : $\frac{6\%}{12}=0{,}5\%$
2) Dans l'hypothèse d'un remboursement par annuités constantes, la banque aurait annoncé un taux r équivalent (annuel) au taux nominal i. Dès lors :

   $1+r=(1+\frac{6\%}{12})^{12}$ soit : $r=(1{,}005)^{12}-1=6{,}17\%$
3) Dans l'hypothèse d'un remboursement par trimestrialités constantes, la banque aurait annoncé un taux nominal i équivalent à r = 6,17%. Dès lors :

   $1+6{,}17\%=(1+\frac{i}{4})^4$ soit : $i=4.(1{,}0617^{\frac{1}{4}}-1)=6{,}03\%$

Remarque méthodologique : pour passer du taux nominal (nécessairement annuel) proposé pour des mensualités à un taux nominal (nécessairement annuel) proposé pour des trimestrialités (question 3), il convient de passer par le taux équivalent annuel (question 2).

b. Formule du taux continu

Soit i le taux continu équivalent au taux r discret. D'après la formule du taux équivalent :

$$1+r=(1+\frac{i}{n})^n=e^{n.\ln(1+\frac{i}{n})}$$

Mais désormais n tend vers l'infini.

Or : $\ln(1+x)\approx x$ quand x est au voisinage de 0.

Par ailleurs, si n tend vers l'infini alors i/n tend vers 0.

Ainsi :

$\ln(1+\frac{i}{n}) \approx \frac{i}{n}$ lorsque n est au voisinage de l'infini (ou, ce qui est équivalent, i/n est au voisinage de 0).

Finalement : $1+r \approx e^{n.\frac{i}{n}} = e^{i}$

Au total : $i = \ln(1+r)$

c. Exemple

Le taux continu i équivalent au taux discret r = 6% vérifie :
$i = \ln(1+6\%) = \ln 1{,}06 = 5{,}83\%$

9. Introduction à la décision d'investissement

a. Principe

Un projet d'investissement peut être envisagé favorablement à condition que la trésorerie qu'il génère dans le futur soit supérieure au montant qu'il a initialement fallu décaisser pour le mettre en œuvre.

L'application de ce principe revient à calculer la Valeur Actuelle Nette (VAN) du projet :

VAN = $-I_0 + \sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1+K)^t}$ où :

- CF_t = cash flow (ou flux de trésorerie) perçu l'année t
- K = taux d'actualisation
- I_0 = investissement initial.

Finalement :

- si VAN > 0, le projet peut être adopté ;
- si VAN < 0, le projet doit être écarté ;
- si VAN = 0, l'entreprise est indifférente au projet.

b. Exemple

Une entreprise envisage l'acquisition d'une machine d'une valeur de 10 000 €. Cette machine devrait générer, chaque année des cash flows de 4 000 € pendant 5 an. Sur la base d'un taux d'actualisation de 10% calculer la VAN et conclure.

VAN = -10 000 + $\sum_{t=1}^{5} \frac{4000}{(1+10\%)^t}$ = -10 000 + $4000.\frac{1-1{,}10^{-5}}{0{,}10}$ = 5 163 € >0

donc le projet peut être adopté