Sélection d'un portefeuille : Modèles de Markowitz et de Sharpe

Olivier Levyne (2007)
Docteur en Sciences Economiques
HDR en Sciences de Gestion
Professeur des Universités

1. Principe de base du modèle de Markowitz

Entre 2 portefeuilles caractérisés par leur rendement (supposé aléatoire), on retient :

- à risque identique celui qui a l'espérance de rendement la plus élevée ;
- à espérance de rendement identique, celui qui a présente le risque le plus faible.

Ce principe conduit à éliminer un certain nombre de portefeuilles, moins efficients que d'autres.
La courbe qui relie l'ensemble des portefeuilles efficients s'appelle la frontière efficiente.
En dessous de cette courbe, tous les portefeuilles rejetés sont dits dominés.

2. Sélection d'un des portefeuilles situés sur la frontière efficiente

Soit R_p le rendement du portefeuille composé de n actifs caractérisés par leur rendement respectif $R_1, R_2, \ldots R_n$. On suppose, en outre, que chaque actif i entre pour une proportion X_i dans la composition du portefeuille P.

En d'autres termes : $R_p = \sum_{i=1}^{n} X_i R_i$.

Dès lors :

$$E(R_p) = E(\sum_{i=1}^{n} X_i R_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i E(R_i)$$

$$V(R_p) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i X_j \operatorname{cov}(X_i, X_j)$$

Sélectionner un portefeuille revient à choisir celui tel que :

- $E(R_p)$ soit maximal …
- … et $V(R_p)$ soit minimal…
- sous la contrainte que $\sum_{i=1}^{n} X_i = 1$.

Il s'agit donc d'un problème de maximisation d'une fonction économique sous contrainte.

Soit Z cette fonction économique.

Z = $\Phi E(R_p) - V(R_p)$ qui doit être maximisée sous la contrainte que $\sum_{i=1}^{n} X_i$ = 1,

où Φ est un paramètre qui représente le degré d'aversion au risque des investisseurs. En d'autres termes, il s'agit du taux marginal de substitution du rendement et du risque qui exprime dans quelle mesure l'investisseur est d'accord pour supporter un risque accru en contrepartie d'un accroissement de son espérance de rendement.

En utilisant le lagrangien de cette expression, le problème de maximisation sous contrainte consiste à déterminer le maximum de la fonction Z définie par :

$$Z = \Phi.\sum_{i=1}^{n} X_i E(R_i) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i X_j \operatorname{cov}(R_i, R_j) + \lambda\left(1 - \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

Cette fonction de n+1 variables ($X_1, X_2, ..., X_n, \lambda$) est maximisée si sa dérivée (partielle) par rapport à chacune de ces variables est nulle, ce qui revient à poser le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Z}{\partial X_1} = \Phi E(R_1) - 2X_1 \operatorname{cov}(R_1, R_1) - 2X_2 \operatorname{cov}(R_1, R_2) - ... - 2X_n \operatorname{cov}(R_1, R_n) - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial Z}{\partial X_2} = \Phi E(R_2) - 2X_2 \operatorname{cov}(R_2, R_1) - 2X_2 \operatorname{cov}(R_2, R_2) - ... - 2X_n \operatorname{cov}(R_2, R_n) - \lambda = 0 \\ ... \\ \dfrac{\partial Z}{\partial X_n} = \Phi E(R_n) - 2X_1 \operatorname{cov}(R_n, R_1) - 2X_2 \operatorname{cov}(R_n, R_2) - ... - 2X_n \operatorname{cov}(R_n, R_n) - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial Z}{\partial \lambda} = 1 - X_1 - X_2 - ... - X_n = 0 \end{cases}$$

Soit $\operatorname{cov}(R_i, R_j) = \sigma_{ij}$

On peut alors écrire :

$$\begin{cases} 2X_1\sigma_{11} + 2X_2\sigma_{12} + ... + 2X_n\sigma_{1n} + \lambda = \Phi E(R_1) \\ 2X_2\sigma_{21} + 2X_2\sigma_{22} + ... + 2X_n\sigma_{2n} + \lambda = \Phi E(R_2) \\ ... \\ 2X_1\sigma_{n1} + 2X_2\sigma_{n2} + ... + 2X_n\sigma_{nn} + \lambda = \Phi E(R_n) \\ X_1 + X_2 + ... + X_n = 1 \end{cases}$$

soit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} 2\sigma_{11} & 2\sigma_{12} & ... & 2\sigma_{1n} & 1 \\ 2\sigma_{21} & 2\sigma_{22} & ... & 2\sigma_{2n} & 1 \\ ... & & ... & & \\ 2\sigma_{n1} & 2\sigma_{n2} & ... & 2\sigma_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & ... & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ ... \\ X_n \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi E(R_1) \\ \Phi E(R_2) \\ \\ \Phi E(R_n) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soit désormais :

$$A = \begin{pmatrix} 2\sigma_{11} & 2\sigma_{12} & ... & 2\sigma_{1n} & 1 \\ 2\sigma_{21} & 2\sigma_{22} & ... & 2\sigma_{2n} & 1 \\ ... & & ... & & \\ 2\sigma_{n1} & 2\sigma_{n2} & ... & 2\sigma_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & ... & 1 & 0 \end{pmatrix} ;\ B = \begin{pmatrix} \Phi E(R_1) \\ \Phi E(R_2) \\ \\ \Phi E(R_n) \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ ... \\ X_n \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, le système d'équations à résoudre peut se résumer sous la forme A.X=B

Par conséquent : X = $A^{-1}.B$

La détermination du poids de chacun des n actifs susceptibles d'entrer dans la composition d'un portefeuille passe donc par l'inversion d'une matrice carrée de n+1 lignes et n+1 colonnes.

Compte tenu de la lourdeur des calculs nécessaires à l'inversion de la matrice A, Sharpe a proposé un modèle simplifié, décrit ci-après et qui trouve par ailleurs une application pratique dans le cadre de la détermination du coût des capitaux propres.

3. Modèle simplifié de Sharpe

En considérant la même hypothèse que dans le modèle de Markowtiz, à savoir un portefeuille dont le rendement R_p est défini par :

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} X_i R_i \ ,$$

on suppose par ailleurs que le rendement de R_i chaque actif i est lié linéairement à un indice de marché noté I.

En d'autres termes : $R_i = \alpha_i + \beta_i I + \varepsilon_i$ où I et ε_i constituent des variables aléatoires qui présentent les propriétés suivantes :

E(ε_i) = 0
V(ε_i)= constante
Cov($\varepsilon_i , \varepsilon_j$) = 0
I = $\alpha_{n+1} + v_{n+1}$ où v_{n+1} est une variable aléatoire telle que :
E(v_{n+1}) = 0 et V(v_{n+1})= constante = Q_{n+1}

Dans ce cas :

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} X_i R_i = R_p = \sum_{i=1}^{n} X_i(\alpha_i + \beta_i I + \varepsilon_i) = R_p = \sum_{i=1}^{n} X_i(\alpha_i + \varepsilon_i) + \sum_{i=1}^{n} X_i \beta_i I$$

Dès lors :

$$\mathrm{E}(R_p) = \mathrm{E}[\sum_{i=1}^{n} X_i(\alpha_i + \varepsilon_i) + \sum_{i=1}^{n} X_i \beta_i I\ ] = \sum_{i=1}^{n} X_i E(\alpha_i) + \sum_{i=1}^{n} X_i E(\varepsilon_i) + \sum_{i=1}^{n} X_i \beta_i E(\alpha_{n+1} + \nu_{n+1})$$

Soit $X_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} X_i \beta_i$. Dans ce cas, comme E(ε_i) = 0 :

$$\mathrm{E}(R_p) = \sum_{i=1}^{n} X_i \alpha_i + 0 + X_{n+1}[\mathrm{E}(\alpha_{n+1} + \nu_{n+1})] = \sum_{i=1}^{n} X_i \alpha_i + 0 + X_{n+1}\ \alpha_{n+1} \text{ car } \mathrm{E}(\nu_{n+1}) = 0$$

Finalement : $\mathrm{E}(R_p) = \sum_{i=1}^{n+1} X_i \alpha_i$

De même : $\mathrm{V}(R_p) = \mathrm{V}[\sum_{i=1}^{n} X_i(\alpha_i + \varepsilon_i) + \sum_{i=1}^{n} X_i \beta_i I\ ] =$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 V(\alpha_i) + \sum_{i=1}^{n} X_i^2 V(\varepsilon_i) + \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \beta_i^2 V(\alpha_{n+1} + \nu_{n+1}).$$

Or, la variance d'une constante (comme α_i) est égale à 0.
En outre, notons $Q_i = V(\varepsilon_i)$. De plus on sait que : $Q_{n+1} = V(\nu_{n+1})$ Dès lors :

$\mathrm{V}(R_p) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 Q_i + X_{n+1}^2\ Q_{n+1}$ car V(α_{n+1}) = V(constante) = 0

Finalement : $\mathrm{V}(R_p) = \sum_{i=1}^{n+1} X_i^2 Q_i$

Dans ce contexte la maximisation de la fonction économique Z revient à déterminer :

Max Z = max $\Phi E(R_p) - V(R_p)$ sous la contrainte que $\sum_{i=1}^{n} X_i = 1$.

$$= \max\ [\Phi \,.\sum_{i=1}^{n+1} X_i \alpha_i - \sum_{i=1}^{n+1} X_i^2 Q_i + \lambda\left(1 - \sum_{i=1}^{n} X_i\right).$$

Le calcul de chacune des dérivées partielles s'écrit alors :

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial Z}{\partial X_1} = \Phi.\alpha_1 - 2X_1Q_1 - \lambda = 0 \\
\dfrac{\partial Z}{\partial X_2} = \Phi.\alpha_2 - 2X_2Q_2 - \lambda = 0 \\
\ldots \\
\dfrac{\partial Z}{\partial X_n} = \Phi.\alpha_n - 2X_nQ_n - \lambda = 0 \\
\dfrac{\partial Z}{\partial X_{n+1}} = \Phi.\alpha_{n+1} - 2X_{n+1}Q_{n+1} - \lambda = 0 \\
\dfrac{\partial Z}{\partial \lambda} = 1 - X_1 - X_2 - \ldots - X_n = 0
\end{cases}
$$

soit matriciellement :

$$
\begin{pmatrix}
2Q_1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\
0 & 2Q_2 & \ldots & 0 & 1 \\
\ldots & & \ldots & & \\
0 & 0 & \ldots & 2Q_{n+1} & 1 \\
1 & 1 & \ldots & 1 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
X_1 \\ X_2 \\ \ldots \\ X_{n+1} \\ \lambda
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\Phi.\alpha_1 \\ \Phi.\alpha_2 \\ \\ \Phi.\alpha_{n+1} \\ 1
\end{pmatrix}
$$

La résolution de ce système passe alors par l’inversion d’une matrice beaucoup plus simple à inverser que précédemment.

4. Le MEDAF

Le Modèle d’Evaluation des Actifs Financiers, dont est dérivée la formule de la droite de marché utilisée pour déterminer le coût des capitaux propres revient à endogénéiser l’hypothèse du modèle simplifié de Sharpe. En d’autres termes, cette approche consiste à remplacer l’indice I de la formule de Sharpe par le rendement R_M de l’ensemble du marché.

La formule est alors : $R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + \varepsilon_i$ avec :

E(ε_i) = 0

V(ε_i)= constante