Le modèle de Markowitz et ses prolongements– Approche simplifiée

Olivier Levyne (2008)
Docteur en Sciences Economiques
HDR en Sciences de Gestion
Professeur des Universités

Entre 2 portefeuilles caractérisés par leur rendement (supposé aléatoire), on retient :

- à risque identique celui qui a l'espérance de rendement la plus élevée ;
- à espérance de rendement identique, celui qui présente le risque le plus faible.

Ce principe conduit à éliminer un certain nombre de portefeuilles, moins efficients que d'autres.
La courbe qui relie l'ensemble des portefeuilles efficients s'appelle la frontière efficiente.
En dessous de cette courbe, tous les portefeuilles rejetés sont dits dominés.

1. Exemple d'un portefeuille composé de 2 actions

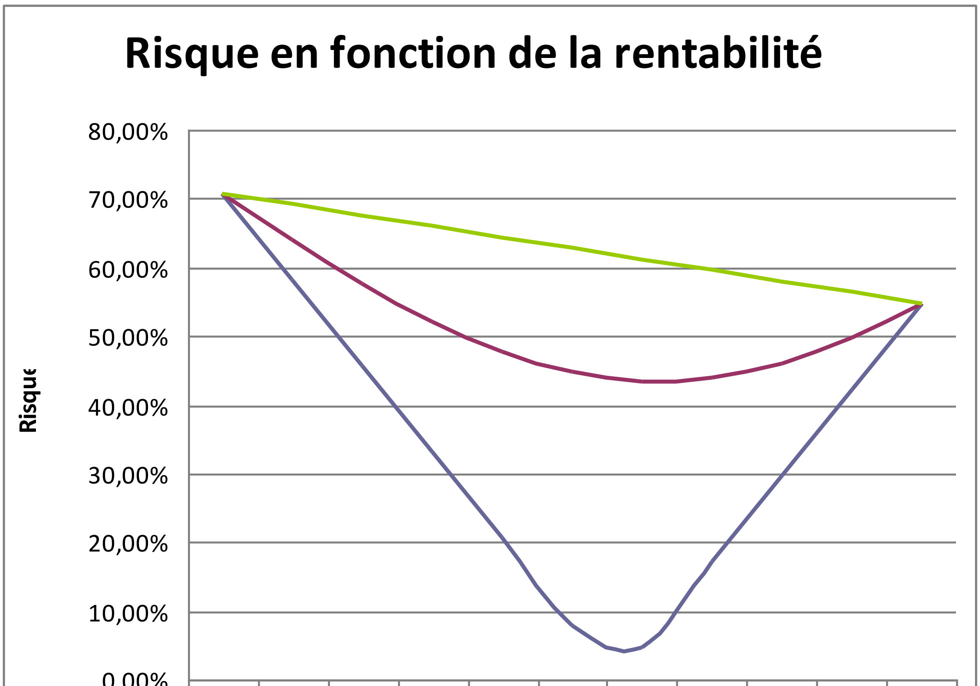
Hypothèses

Action	A	B
$E(R_i)$	10%	20%
$V(R_i)$	30%	50%
$\sigma(R_i)$	55%	71%

Il est possible de déterminer $E(R_P)$ en fonction des poids respectifs x_A et x_B des actifs A et B dans le portefeuille :

				$\sigma(R_p)$		
x_A	x_B	$E(R_P)$	r=	-1	0	1
0%	100%	20%		70,71%	70,71%	70,71%
10%	90%	19%		58,16%	63,87%	69,12%
20%	80%	18%		45,61%	57,62%	67,52%
30%	70%	17%		33,07%	52,15%	65,93%
40%	60%	16%		20,52%	47,75%	64,34%
50%	50%	15%		7,97%	44,72%	62,74%
60%	40%	14%		4,58%	43,36%	61,15%
70%	30%	13%		17,13%	43,82%	59,55%
80%	20%	12%		29,68%	46,04%	57,96%
90%	10%	11%		42,22%	49,80%	56,37%
100%	0%	10%		54,77%	54,77%	54,77%

Graphiquement :



	20%	19%	18%	17%	16%	15%	14%	13%	12%	11%	10%
r=-1	70,71	58,16	45,61	33,07	20,52	7,97%	4,58%	17,13	29,68	42,22	54,77
r=0	70,71	63,87	57,62	52,15	47,75	44,72	43,36	43,82	46,04	49,80	54,77
r=1	70,71	69,12	67,52	65,93	64,34	62,74	61,15	59,55	57,96	56,37	54,77

2. Détermination du poids de l'actif A permettant de minimiser le risque du portefeuille à 2 actifs

$$R_p = x_A R_A + x_B R_B$$
$$R_p = x_A R_A + (1 - x_A) R_B$$

Donc :

$$V(R_p) = x_A^2 V(R_A) + (1 - x_A)^2 V(R_B) + 2x_A(1 - x_A)\operatorname{cov}(R_A, R_B)$$
$$V(R_p) = x_A^2 V(R_A) + V(R_B) - 2x_A V(R_B) + x_A^2 V(R_B) + 2x_A(1 - x_A)\operatorname{cov}(R_A, R_B)$$
$$V(R_p) = x_A^2 V(R_A) + V(R_B) - 2x_A V(R_B) + x_A^2 V(R_B) + 2x_A \operatorname{cov}(R_A, R_B) - 2x_A^2 \operatorname{cov}(R_A, R_B)$$

La variance est minimale lorsque sa dérivée est nulle. On cherche alors x_A tel que

$$\frac{dV(R_P)}{dx_A} = V'(R_P) = 0$$

Dès lors :

$$V'(R_p) = 2x_A V(R_A) - 2.V(R_B) + 2x_A V(R_B) + 2\operatorname{cov}(R_A, R_B) - 4x_A \operatorname{cov}(R_A, R_B) = 0$$

En divisant les termes de l'égalité ci-dessus par 2 :

$$V'(R_p) = x_A V(R_A) - .V(R_B) + x_A V(R_B) + \text{cov}(R_A, R_B) - 2x_A \,\text{cov}(R_A, R_B) = 0$$

Ainsi :

$$x_A = \frac{.V(R_B) - \text{cov}(R_A, R_B)}{V(R_A) + V(R_B) - 2.\text{cov}(R_A, R_B)}$$

3. Diversification et réduction du risque

Soit R_p le rendement du portefeuille composé de n actifs caractérisés par leur rendement respectif $R_1, R_2, \ldots R_n$.

En d'autres termes : $R_p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i$.

En vue de déterminer E(R_p) et V(R_p), supposons que :
$E(R_1) = E(R_2) = \ldots = E(R_n)=E$
$V(R_1) = V(R_2) = \ldots = V(R_n)= \sigma^2$

$$E(R_p) = E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i) = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} E(R_i) = \frac{1}{n}.(\sum_{i=1}^{n} E) = \frac{1}{n}.nE = E$$

Supposons, dans un premier temps, que les rendements de chacun des n actifs fluctuent indépendamment les uns des autres. Dans ce cas, la variance d'une somme est égale (uniquement) à la somme des variances. Ainsi :

$$V(R_p) = V(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i) = \frac{1}{n^2}.\sum_{i=1}^{n} V(R_i) = \frac{1}{n^2}.(\sum_{i=1}^{n} \sigma^2) = \frac{1}{n^2}.n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Si n tend vers l'infini, alors $\frac{\sigma^2}{n}$ tend vers 0.

Supposons maintenant que les rendements de chacun des n actifs soient corrélés les uns aux autres. Dans ce cas :

$$V(R_p) = V(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i) = \frac{1}{n^2}.\sum_{i=1}^{n} V(R_i) + \frac{2}{n^2}\sum_{1\le i<j\le n} \text{cov}(R_i, R_j) = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{2}{n^2} S$$

Où : S = $\sum_{1\le i<j\le n} \text{cov}(R_i, R_j)$

Soit $\overline{C}$ la covariance moyenne du portefeuille P. Par définition :

$$\overline{C} = \frac{\sum_{1\le i<j\le n} \text{cov}(R_i, R_j)}{N} = \frac{S}{N}$$ où N correspond au nombre de covariances distinctes.

La liste de toutes les covariances possibles correspond à la matrice des variances et covariances ci-après :

$$\begin{pmatrix} \operatorname{cov}(R_1, R_1) & \operatorname{cov}(R_1, R_2) & & \operatorname{cov}(R_1, R_n) \\ \operatorname{cov}(R_2, R_1) & \operatorname{cov}(R_2, R_2) & & \operatorname{cov}(R_2, R_n) \\ & & & \\ \operatorname{cov}(R_n, R_1) & \operatorname{cov}(R_n, R_2) & & \operatorname{cov}(R_n, R_n) \end{pmatrix}$$

Dans la mesure où $cov(R_i,R_j) = cov(R_j,R_i)$, les termes situés au dessus de la diagonale de la matrice sont identiques à leurs symétriques par rapport à la diagonale.

Le nombre de termes situés au dessus de la diagonale est égal :
- à la dernière ligne : *0*
- à l'avant dernière ligne : *1*
- …
- à la première ligne : *n-1* (il y a *n* termes et on ne retient pas $cov(R_1,R_1)$).

Au total, le nombre N de termes est égal à : 0 + 1 + … +(n-1) = $\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$

Dans la mesure où $\overline{C} = \frac{S}{N}$, on a :

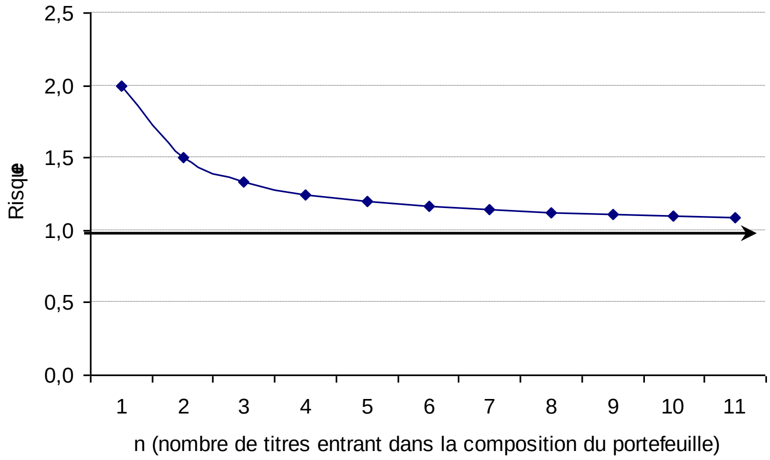
$S = N.\ \overline{C} = \frac{n(n-1)}{2}\overline{C}$

Finalement :

$$V(R_p) = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{2}{n^2}S = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{2}{n^2}.\frac{n(n-1)}{2}\overline{C} = \frac{\sigma^2}{n} + .\frac{n(n-1)}{n^2}\overline{C}$$

Lorsque n tend vers l'infini, $\frac{\sigma^2}{n}$ tend vers 0 et $\frac{n(n-1)}{n^2}$ tend vers le rapport des termes de plus haut degré. Ce rapport est égal à 1. En multipliant ce résultat par $\overline{C}$, on en déduit que $V(R_p)$ tend vers la covariance moyenne $\overline{C}$. Le risque (égal à l'écart type de R_p) ne peut donc être éliminé, même par diversification du portefeuille dans la mesure où il tend donc vers la racine carrée de la covariance moyenne.
Graphiquement, cela signifie que la courbe représentative du risque en fonction du nombre de titres entrant dans la composition du portefeuille admet une asymptote horizontale d'équation y=$\overline{C}$.

Le graphique ci-dessous, présenté à titre illustratif, suppose que la covariance moyenne est égale à 1.



4. Les fondements du MEDAF

a. Principe général

En considérant la même hypothèse que dans le modèle de Markowitz, à savoir un portefeuille dont le rendement R_p est défini par :

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} X_i R_i \ ,$$

on suppose par ailleurs que le rendement de R_i chaque actif i est lié linéairement à un indice de marché noté I.

En d'autres termes : $R_i = \alpha_i + \beta_i I + \varepsilon_i$ où I et ε_i est une variable aléatoire qui présente les propriétés suivantes :

E(ε_i) = 0

V(ε_i)= constante

Cov(ε_i , ε_j) = 0 pour 2 actifs i et j entrant dans la composition du portefeuille.

Dans ce cas, le choix du portefeuille situé sur la frontière efficiente qui devra être retenu en fonction du degré d'aversion au risque de l'investisseur est plus aisé. Il relève de la résolution d'un système d'équations qui correspond à l'inversion d'une matrice quasiment diagonale (il suffit alors de considérer les inverses des nombres situés sur la diagonale).

Le Modèle d'Equilibre des Actifs Financiers, dont est dérivée la formule de la droite de marché utilisée pour déterminer le coût des capitaux propres revient à endogénéiser l'hypothèse du modèle simplifié de Sharpe. En d'autres termes, cette approche consiste à remplacer l'indice I de la formule de Sharpe par le rendement R_M de l'ensemble du marché.

La formule est alors : $R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + \varepsilon_i$

b. Le beta d'un portefeuille est la moyenne pondérée des betas des actifs qui le composent

Rappel de la formule du MEDAF : $R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + \varepsilon_i$

On considère un portefeuille P composé de n actifs i entrant chacun pour une proportion X_i dans sa composition. Soit R_p son rendement.

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} X_i R_i$$

On peut alors calculer cov (R_p, R_M) = cov ($\sum_{i=1}^{n} X_i R_i, R_M$) = $\sum_{i=1}^{n} X_i$ cov(R_i, R_M).

Dès lors $\beta_p = \dfrac{\operatorname{cov}(R_p, R_M)}{V(R_M)} = \dfrac{X_1 \operatorname{cov}(R_1, R_M)}{V(R_M)} + \dfrac{X_2 \operatorname{cov}(R_2, R_M)}{V(R_M)} + \ldots + \dfrac{X_n \operatorname{cov}(R_n, R_M)}{V(R_M)}$

Soit encore : $\boxed{\beta_p = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \ldots + X_n\beta_n}$

c. Le rendement d'un titre est égal au taux sans risque augmenté d'une prime de risque

Soit un portefeuille composé d'un contrat sur indice de marché (par exemple : contrats à terme sur CAC 40) et de titres non risqués (par exemple : OAT).
Soit :

- ✓ X_M la proportion des contrats sur indice de marché dans le portefeuille ;
- ✓ β_M le beta des contrats sur indice de marché ;
- ✓ β_F le beta des titres non risqués ;
- ✓ R_F le taux sans risque.

D'après la formule du beta pondéré (cf. : 1), le beta de ce portefeuille est :

$$\beta_p = X_M \beta_M + (1 - X_M)\beta_F$$

Comme β_M est le beta des contrats sur indice de marché, β_M = 1.
En outre, comme β_F est le beta des titres non risqués, β_F = 0.

Dès lors : $\beta_p = X_M .1 + (1 - X_M)0$ soit $X_M = \beta_p$

Finalement, comme $R_p = X_M R_M + (1 - X_M) R_F$, on en déduit que :

$$R_p = \beta_p R_M + (1 - \beta_p) R_F = R_F + \beta_p (R_M - R_F).$$

Ainsi, en posant p=i (portefeuille réduit à l'actif i) :

$$\boxed{R_i = R_F + \beta_i (R_M - R_F)}.$$

d. Autre application de la formule du beta d'un portefeuille : lien entre le beta endetté et le beta désendetté en l'absence de fiscalité.

Les actifs d'une entreprise sont financés par capitaux propres et par endettement, respectivement représentés par des actions et des obligations.

Soit :

- ✓ β_A le beta des actifs ;
- ✓ β_{CP} le beta des actions ;
- ✓ β_D le beta des obligations.

D'après la formule du beta pondéré (cf. : 1), le beta du portefeuille composé de la totalité des actions et des obligations de la société est :

$$\beta_A = \beta_{CP} \cdot \frac{CP}{CP + D} + \beta_D \cdot \frac{D}{CP + D}$$

Supposons (hypothèse régulièrement faite dans la pratique) que la dette est non risquée. Dans ce cas : $\beta_D = 0$. Ainsi :

$$\beta_A = \beta_{CP} \cdot \frac{CP}{CP + D} = \beta_{CP} \cdot \frac{1}{1 + \frac{D}{CP}}$$ soit finalement :

$$\boxed{\beta_{CP} = \beta_A \left(1 + \frac{D}{CP}\right)}$$

avec β_A = beta des actifs = beta des actions de la société si celle-ci était financée exclusivement par capitaux propres. En d'autres termes, il s'agit du beta désendetté.