

La distance au défaut

Olivier Levyne

Dans une note publiée par Moody's KMV en 2003, Crosbie et Bohn définissent la notion de distance au défaut (*Distance to Default* ou D2D) qui est prise en compte dans la notation que l'agence attribue.

La D2D est issue du lemme d'Ito et de la formule de Merton (1974).

1. Lemme d'Ito et application

Soit une action sous-jacente dont le cours S définit un mouvement brownien géométrique :

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

où $dz = \varepsilon \sqrt{dt}$ et $\varepsilon \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$; dz définit bien un processus de Wiener

Le développement limité de la fonction F de 2 variables S et t est fourni par la formule de Taylor :

$$dF(S, t) = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial S} dS + \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} (dS)^2$$

$$dF(S, t) = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial S} [\mu S dt + \sigma S dz] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} [\mu S dt + \sigma S \varepsilon \sqrt{dt}]^2$$

Par troncature à l'ordre 1 :

$$dF(S, t) = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial S} [\mu S dt + \sigma S dz] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \varepsilon^2 dt$$

Or :

$$E(\sigma^2 S^2 \varepsilon^2 dt) = \sigma^2 S^2 dt E(\varepsilon^2)$$

Et, par la formule de Koenig-Huyghens :

$$V(\varepsilon) = E(\varepsilon^2) - [E(\varepsilon)]^2 \Rightarrow E(\varepsilon^2) = V(\varepsilon) + [E(\varepsilon)]^2 = 1 + 0 = 1$$

Donc :

$$E(\sigma^2 S^2 \varepsilon^2 dt) = \sigma^2 S^2 dt$$

Par ailleurs :

$$V(\sigma^2 S^2 \varepsilon^2 dt) = \sigma^4 S^4 dt^2 V(\varepsilon)$$

Cette expression tend vers 0 quand dt tend vers 0. Par conséquent, l'expression $\sigma^2 S^2 \varepsilon^2 dt$ peut être approchée par $\sigma^2 S^2 dt$.

Dès lors :

$$dF(S, t) = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial S} [\mu S dt + \sigma S dz] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt$$

$$dF(S, t) = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \mu S \frac{\partial F}{\partial S} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right] dt + \frac{\partial F}{\partial S} \sigma S dz$$

Soit :

$$F(S, t) = \ln(S) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial S} = \frac{1}{S} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2} \end{cases}$$

En adaptant l'expression de $dF(S, t)$ à cette hypothèse :

$$d\ln S = \left[0 + \mu S \frac{1}{S} - \frac{1}{2} \frac{1}{S^2} \sigma^2 S^2 \right] dt + \frac{1}{S} \sigma S dz$$

$$d\ln S = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz$$

Soit désormais S_t le cours de l'action S à la date t et dz_t le processus de Wiener

En intégrant de 0 à t :

$$\int_0^t d\ln S_u = \int_0^t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) du + \int_0^t \sigma dz_u$$

$$[\ln S_u]_0^t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) [u]_0^t + \sigma [z_u]_0^t$$

$$\ln S_t - \ln S_0 = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t - 0) + \sigma (z_t - z_0)$$

$$\ln \frac{S_t}{S_0} = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz_t$$

$$\ln S_t = \ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz_t$$

Ainsi :

$$E(\ln S_t) = E \left[\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma \varepsilon \sqrt{dt} \right]$$

Comme $E(\varepsilon) = 0$:

$$E(\ln S_t) = \ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt$$

Comme $V(\varepsilon) = 1$:

$$V(\ln S_t) = \sigma^2 dt$$

Ainsi :

$$\ln S_t \hookrightarrow \mathcal{N} \left[\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt, \sigma^2 dt \right]$$

En d'autres termes, S_t suit une loi log-normale.

Par ailleurs :

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz_t}$$

2. Transposition à la finance d'entreprise

Dans l'hypothèse d'une entreprise dont la dette D est représentée par un zéro coupon qui arrive à l'échéance dans t années, les actionnaires disposent implicitement, d'un point de vue économique, d'un call sur les actifs de l'entreprise, le prix d'exercice étant le montant de la dette à rembourser. La valeur des capitaux propres (E) est alors égale à la prime de ce call. Les caractéristiques de cette option sont les suivantes :

- Valeur du sous-jacent = valeur des actifs = valeur d'entreprise = V
- Prix d'exercice = montant de la dette à rembourser = D
- Durée restant jusqu'à l'échéance = maturité résiduelle de la dette = τ
- Volatilité du sous-jacent = volatilité des actifs = σ_A
- Taux sans risque = r

Dans ce cas, la formule de Black & Scholes (1973) s'écrit :

$$E = V \cdot \Phi \left[\frac{\ln\left(\frac{V}{D}\right) + \left(r + \frac{\sigma_A^2}{2}\right)\tau}{\sigma_A \sqrt{\tau}} \right] - D e^{-r\tau} \Phi \left[\frac{\ln\left(\frac{V}{D}\right) + \left(r - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)\tau}{\sigma_A \sqrt{\tau}} \right] \quad [1]$$

En outre, l'hypothèse de mouvement brownien géométrique qui sous-tend l'évolution du cours de l'action (S) peut être appliqué aux capitaux propres (E) :

$$dE = \mu_E E dt + \sigma_E E dz \quad [2]$$

Enfin, l'évolution de la prime du call sur les actifs, donc la valeur des capitaux propres (E), fonction de la valeur des actifs (V) et de la durée restant jusqu'à l'échéance (τ), peut être obtenue à partir de la formule ci-dessous qui a été écrite dans le cadre de la démonstration du lemme d'Ito :

$$dF(S, t) = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \mu S \frac{\partial F}{\partial S} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \sigma_S^2 S^2 \right] dt + \frac{\partial F}{\partial S} \sigma_S S dz$$

Ainsi :

$$dE(V, t) = \left[\frac{\partial E}{\partial t} + \mu V \frac{\partial E}{\partial V} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial V^2} \sigma_V^2 V^2 \right] dt + \frac{\partial E}{\partial V} \sigma_V V dz \quad [3]$$

En égalisant les termes aléatoires des équations [2] et [3] :

$$\sigma_E E = \frac{\partial E}{\partial V} \sigma_V V$$

Or :

$$\frac{\partial E}{\partial V} = \Phi(d_1) = \Phi \left[\frac{\ln\left(\frac{V}{D}\right) + \left(r + \frac{\sigma_A^2}{2}\right)\tau}{\sigma_A \sqrt{\tau}} \right]$$

Donc :

$$\sigma_E E = \Phi \left[\frac{\ln \left(\frac{V}{D} \right) + \left(r + \frac{\sigma_A^2}{2} \right) \tau}{\sigma_A \sqrt{\tau}} \right] \sigma_V V$$

Finalement, la résolution, via le Solver d'Excel, du système non linéaire suivant de 2 équations à 2 inconnues permet d'obtenir V et σ_A :

$$\begin{cases} E = V \cdot \Phi \left[\frac{\ln \left(\frac{V}{D} \right) + \left(r + \frac{\sigma_A^2}{2} \right) \tau}{\sigma_A \sqrt{\tau}} \right] - De^{-r\tau} \Phi \left[\frac{\ln \left(\frac{V}{D} \right) + \left(r - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) \tau}{\sigma_A \sqrt{\tau}} \right] \\ \sigma_E E = \Phi \left[\frac{\ln \left(\frac{V}{D} \right) + \left(r + \frac{\sigma_A^2}{2} \right) \tau}{\sigma_A \sqrt{\tau}} \right] \sigma_V V \end{cases}$$

3. Distance au défaut (D2D) selon Crosbie & Bohn

a. Principe

Crosbie & Bohn (2003) proposent une formulation simple de la distance au défaut. Ils la définissent comme l'écart entre la valeur d'entreprise ou valeur des actifs (V) et le point de défaut (D) rapporté à la volatilité des actifs (σ_A) appliquée à la valeur d'entreprise (V).

La D2D prend donc en compte trois éléments qui déterminent sa probabilité de faillite :

1. La valeur des actifs qui est fondée sur les perspectives de la société et qui prend en compte les informations disponibles sur son secteur et sur l'économie
2. Le risque c'est-à-dire l'incertitude sur la valeur des actifs
3. Le levier qui est issu du rapport entre la valeur comptable de la dette, c'est-à-dire du montant à rembourser, et la valeur de marché des actifs

Selon les bases de données de Crosbie & Bohn, le défaut intervient lorsque la valeur des actifs se situe entre la dette totale et la dette à court terme. C'est la raison pour laquelle, le point de défaut retenu est la dette à court terme augmentée de 50% de la dette à long terme.

La valeur d'entreprise et la volatilité des actifs sont issus de la résolution du système non linéaire de 2 équations à 2 inconnues du présenté dans le paragraphe précédent.

b. Exemple

Crosbie & Bohn illustrent la notion de D2D par les 2 exemples suivants en milliards d'euros (Mds €)

i. Exemple 1

Valeur des actifs : V	44,1
Point de défaut : D	5,3
Volatilité des actifs : σ_A	21%

Ainsi, si la valeur des actifs est modifiée d'un écart type, elle augmente ou diminue d'un montant égal à 21% de 44,1 soit de 9,3 Mds €. L'écart entre la valeur des actifs

et le point de défaut est de 38,8 Mds € qui correspond à une variation de la valeur des actifs de 4,2 écarts types. La distance au défaut de l'entreprise est alors de 4,2.

ii. Exemple 2

Valeur des actifs : V	42,3
Point de défaut : D	12,2
Volatilité des actifs : σ_A	39%

Ainsi, si la valeur des actifs est modifiée d'un écart type, elle augmente ou diminue d'un montant égal à 39% de 42,3 Mds € soit de 16,5 Mds €. L'écart entre la valeur des actifs et le point de défaut est de 30,1 Mds € qui correspond à une variation de la valeur des actifs de 1,8 écarts types. La distance au défaut de l'entreprise est alors de 1,8.

4. Probabilité de défaut

L'entreprise est en défaut de paiement si la valeur de ses actifs à la date t , (V_t), est inférieure au montant de la dette à rembourser (D). Donc, en notant p la probabilité de défaut :

$$p = P(V_t < D)$$

Or, il a été établi, à la fin de la première partie que, si S est le cours de bourse qui définit un mouvement brownien géométrique, alors :

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz_t}$$

Le remplacement du cours S par la valeur des actifs V conduit à l'expression suivante :

$$V_t = V_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)dt + \sigma_A dz_t}$$

Dès lors :

$$p = P\left(V_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)dt + \sigma_A dz_t} < D\right) = P\left(e^{\left(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)dt + \sigma_A dz_t} < \frac{D}{V_0}\right)$$

$$p = P\left(\left(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)dt + \sigma_A \varepsilon \sqrt{dt} < \ln\left(\frac{D}{V_0}\right)\right)$$

$$p = P\left(\varepsilon < \frac{\ln\left(\frac{D}{V_0}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)dt}{\sigma_A \sqrt{dt}}\right) = P\left(\varepsilon < -\frac{\ln\left(\frac{V_0}{D}\right) + \left(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)dt}{\sigma_A \sqrt{dt}}\right)$$

$$p = \Phi\left(-\frac{\ln\left(\frac{V_0}{D}\right) + \left(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)dt}{\sigma_A \sqrt{dt}}\right) = \Phi(-d_2)$$

5. Distance au défaut et probabilité de défaut

Soit r le rendement des actifs en temps discret :

$$r = \frac{V_t}{V_0} - 1$$

Soit i le rendement équivalent en temps continu :

$$i = \ln(1 + r) = \ln\left(1 + \frac{V_t}{V_0} - 1\right) = \ln\left(\frac{V_t}{V_0}\right)$$

L'entreprise sera en défaut de paiement dès lors que :

$$V_t = D \Leftrightarrow \frac{V_t}{V_0} = \frac{D}{V_0} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{V_t}{V_0}\right) = \ln\left(\frac{D}{V_0}\right) \Leftrightarrow i = \ln\left(\frac{D}{V_0}\right)$$

Le défaut intervient donc lorsque le rendement des actifs devient inférieur ou égal à $\ln\left(\frac{D}{V_0}\right)$.

Or :

$$V_t = V_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma dz_t} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{V_t}{V_0}\right) = i = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma dz_t$$

Donc, le rendement espéré des actifs $E(i)$ vérifie :

$$E(i) = E\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz_t\right] = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt$$

car $E(dz_t) = 0$. En outre, comme $dt = t - 0 = t$:

$$E(i) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t$$

Le rendement espéré est $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t$

Le rendement qui conduit au défaut est $\ln\left(\frac{D}{V_0}\right)$

Le risque de défaut est d'autant plus faible que le rendement espéré est supérieur au rendement qui conduit au défaut, ou que la différence ci-dessous est élevée

$$\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t - \ln\left(\frac{D}{V_0}\right) = \ln\left(\frac{V_0}{D}\right) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t$$

La distance au défaut (D2D) en nombre d'écarts types par unité de temps est donc :

$$= d_2$$

Or, il a été vu, dans la partie 2, que la probabilité de défaut est : $p = \Phi(-d_2)$

Ainsi, la probabilité de défaut est $\Phi(-D2D)$

En général, plus la maturité de la dette est longue et plus la volatilité des actifs est élevée, plus la D2D est faible et plus la probabilité de défaut est élevée :

D	100				
μ	10%				
D2D		V			
σ	τ	200	250	300	350
20%	1	3,87	4,98	5,89	6,66
20%	20	2,56	2,81	3,02	3,19
40%	1	1,78	2,34	2,80	3,18
40%	20	0,61	0,74	0,84	0,92
Probabilité de défaut		V			
σ	τ	200	250	300	350
20%	1	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
20%	20	0,5%	0,2%	0,1%	0,1%
40%	1	3,7%	1,0%	0,3%	0,1%
40%	20	27,1%	23,1%	20,1%	17,8%

La distance au défaut peut aussi s'exprimer comme suit :

$$D2D = \frac{E(V_t) - D}{\sigma E(V_t)} = \frac{1 - \frac{D}{E(V_t)}}{\sigma} = -\frac{\frac{D}{E(V_t)} - 1}{\sigma} = -\frac{\ln\left(\frac{D}{E(V_t)}\right)}{\sigma}$$

Exemple

La valeur d'entreprise V_0 de la société S est aujourd'hui de 130 et sa dette D à rembourser, dans un an, est de 100.

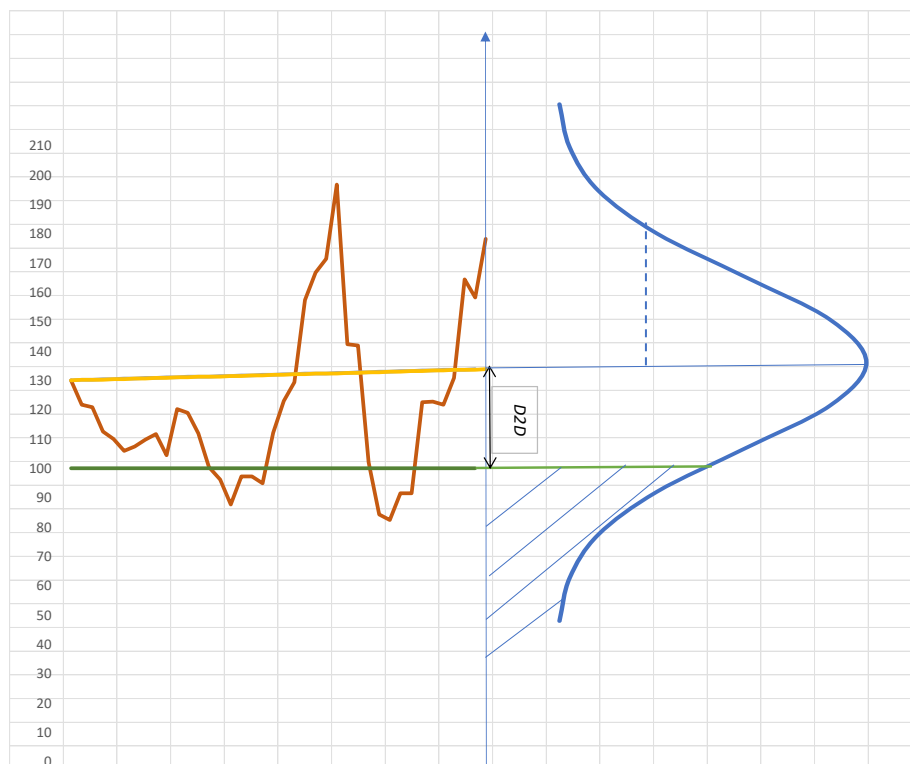
Le rendement r de l'action S est de 5% et sa volatilité σ est de 20%. Dans l'hypothèse d'un processus de diffusion fondé sur un mouvement brownien géométrique et en supposant la log-normalité de la distribution du cours de bourse, son rendement espéré est égal à $0,05 - \frac{0,2^2 \cdot 0,2}{2} = 0,05 - 0,02 = 3\%$

Ainsi, au bout d'un an, la valeur d'entreprise espérée est de : $130 \cdot (1 + 3\%) = 134$

La société S serait alors en défaut si la valeur d'entreprise était ramenée à 100, ce qui traduirait un rendement de $\ln\left(\frac{100}{134}\right) = -29\%$, correspondant à une baisse immédiate de la valeur de $\frac{29\%}{20\%} = 1,5$ écart type

L'évolution de la valeur d'entreprise, sur un an, est représentée par la courbe en rouge et celle de son espérance est représentée par la courbe en orange. La droite en vert met en évidence le montant de la dette à rembourser. La flèche en noir mesure $E(V_t) - D$ et correspond donc au numérateur de la $D2D$.

La probabilité de faillite est l'aire hachurée en bleu sous la courbe de la densité de la loi normale qui représente la distribution de probabilité du log de la valeur d'entreprise. Sa moyenne est donc $E(V_t)$ et sa variance est σ^2 . Le trait en pointillé en bleu mesure donc l'écart type de la distribution.



6. Probabilité de défaut p^* en environnement risque neutre

$$p^* = \Phi \left(-\frac{\ln \left(\frac{V_0}{D} \right) + \left(r - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) t}{\sigma_A \sqrt{t}} \right) = \Phi \left(-\frac{\ln \left(\frac{V_0}{D} \right) + \left(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) t - \mu t + r t}{\sigma_A \sqrt{t}} \right)$$

$$p^* = \Phi \left(-d_2 + \frac{(\mu - r)t}{\sigma_A \sqrt{t}} \right)$$

$$p^* = \Phi \left(\Phi^{-1}(p) + \frac{(\mu - r)}{\sigma_A} \sqrt{t} \right)$$

où, d'après le MEDAF :

$$\mu = r + \beta [E(R_M) - r] = r + \frac{\text{cov}(R_A, R_M)}{V(R_M)} [E(R_M) - r]$$

Or :

$$\rho_{i,M} = \frac{\text{cov}(R_A, R_M)}{\sigma_A \sigma_M} \Leftrightarrow \text{cov}(R_A, R_M) = \rho_{A,M} \sigma_A \sigma_M$$

Ainsi :

$$\mu = r + \frac{\rho_{A,M} \sigma_A \sigma_M}{V(R_M)} [E(R_M) - r]$$

$$\mu = r + \frac{\rho_{A,M} \sigma_A}{\sigma_M} [E(R_M) - r]$$

7. Modèle de Vasicek

a. Rappels des hypothèses issues du modèle de Merton

Vasicek (2003) considère, comme Merton, que le processus d'évolution de la valeur d'un actif A_i définit un mouvement brownien géométrique :

$$dA_i = \mu A_i dt + \sigma A_i dz = \mu A_i dt + \sigma A_i \varepsilon_i \sqrt{dt}$$

Selon le modèle de Merton, le défaut intervient (cf. : partie 4) lorsque l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\varepsilon < \frac{\ln \left(\frac{D}{V_0} \right) - \left(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) t}{\sigma_A \sqrt{t}}$$

Dès lors, la probabilité de défaut est p qui vérifie l'égalité suivante :

$$p = \Phi \left(-\frac{\ln \left(\frac{V_0}{D} \right) + \left(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) t}{\sigma_A \sqrt{t}} \right) = \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{D}{V_0} \right) - \left(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) t}{\sigma_A \sqrt{t}} \right)$$

b. Hypothèses complémentaires de Vasicek

La distribution des pertes sur un portefeuille de prêts doit prendre en compte la corrélation entre les termes ε_i .

Pour cela, il convient de déterminer la distribution des pertes sachant qu'un choc de marché Y est réalisé. Dans ce cas, les chocs résiduels sont indépendants et permettent d'obtenir la distribution des pertes du portefeuille.

Dans ce contexte, chaque terme ε_i se décompose en un choc systématique et un choc idiosyncratique :

$$\varepsilon_i = Y\sqrt{\rho} + Z_i\sqrt{1-\rho}$$

avec

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$: variables normales centrées réduites

ρ : coefficient de corrélation linéaire entre 2 variables ε_i et ε_j

Y : indice économique qui suit une loi normale centrée réduite

Y, Z_1, Z_2, \dots, Z_n : variables normales centrées réduites mutuellement indépendantes

Le terme $Y\sqrt{\rho}$ mesure l'exposition de la société endettée i au risque systématique et $Z_i\sqrt{1-\rho}$ représente son risque spécifique.

En outre,

$$E(\varepsilon_i) = E[Y\sqrt{\rho} + Z_i\sqrt{1-\rho}] = 0 \text{ car } E(Y) = V(Z_i) = 0$$

$$V(\varepsilon_i) = V[Y\sqrt{\rho} + Z_i\sqrt{1-\rho}] = \rho V(Y) + (1-\rho)V(Z_i) = \rho + 1-\rho = 1$$

$$\text{car } V(Y) = V(Z_i) = 1$$

Ceci est cohérent avec l'hypothèse $\varepsilon_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

c. Probabilité de perte sur le i -ème crédit, Y étant fixé

Le défaut intervient pour le i -ème crédit si

$$\varepsilon_i = Y\sqrt{\rho} + Z_i\sqrt{1-\rho} < \frac{\ln\left(\frac{D}{V_0}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)t}{\sigma_A\sqrt{t}} \Leftrightarrow Y\sqrt{\rho} + Z_i\sqrt{1-\rho} < \Phi^{-1}(p)$$

soit encore :

$$Z_i < \frac{\Phi^{-1}(p) - Y\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}}$$

Soit L_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le i -ème emprunteur est en défaut de paiement et la valeur 0 sinon. Les différentes variables L_i sont supposées indépendantes, distribuées selon la même loi de probabilité et de variance constante.

- Dans l'hypothèse où le facteur commun à tous les crédits Y est fixé, la probabilité conditionnelle $p(Y)$ de perte sur un crédit i est :

$$p(Y) = P(L_i = 1/Y) = P\left[Z_i < \frac{\Phi^{-1}(p) - Y\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}}\right] = \Phi\left[\frac{\Phi^{-1}(p) - Y\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}}\right]$$

Y étant fixé, chaque variable L_i suit donc une loi de Bernoulli $\mathcal{B}[p(Y)]$ dont l'espérance est égale au paramètre $p(Y)$

Par ailleurs, l'expression de $p(Y)$ conduit aux conclusions suivantes :

- Une valeur élevée de Y correspond à un « bon » choc du marché qui conduit à des valeurs d'actifs élevées ; plus cette valeur Y élevée, plus le terme $\frac{\Phi^{-1}(p) - Y\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}}$ est petit et donc plus le risque idiosyncratique doit être négatif pour déclencher un défaut
- Plus la corrélation ρ est élevée, plus l'impact de Y sur la valeur critique de Z_i est important.

d. Pourcentage de pertes sur le portefeuille de n crédits

Soit L le pourcentage de pertes sur le portefeuille de n crédits :

$$L = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L_i$$

D'après la loi faible des grands nombres, la perte L sur le portefeuille, sachant que Y est fixé, converge vers son espérance $p(Y)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Dès lors :

$$P(L \leq x) = P[p(Y) \leq x] = P[Y > p^{-1}(x)]$$

car $p(Y)$ est fonction décroissante de Y .

En effet :

$$p'(Y) = -\sqrt{\frac{\rho}{1-\rho}} f\left[\frac{\Phi^{-1}(p) - Y\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}}\right] < 0$$

où f est la densité de loi normale centrée réduite.

Ainsi :

$$P(L \leq x) = 1 - P[Y \leq p^{-1}(x)] = \Phi[-p^{-1}(x)]$$

Or :

$$p(Y) = \Phi\left[\frac{\Phi^{-1}(p) - Y\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}}\right]$$

Pour déterminer $p^{-1}(x)$, il convient de poser

$$p(x) = \Phi\left[\frac{\Phi^{-1}(p) - x\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}}\right] = y \Rightarrow \frac{\Phi^{-1}(p) - x\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}} = \Phi^{-1}(y)$$

Dès lors :

$$x = -\frac{\sqrt{1-\rho} \cdot \Phi^{-1}(y) - \Phi^{-1}(p)}{\sqrt{\rho}}$$

Donc, en remplaçant y par x :

$$p^{-1}(x) = \frac{\Phi^{-1}(p) - \sqrt{1-\rho} \cdot \Phi^{-1}(x)}{\sqrt{\rho}}$$

Et finalement :

$$P(L \leq x) = \Phi[-p^{-1}(x)] = \Phi\left[\frac{\sqrt{1-\rho} \cdot \Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(p)}{\sqrt{\rho}}\right]$$

Cette expression est la fonction de répartition de la proportion de crédits en défaut au sein d'un portefeuille homogène et diversifié. Le portefeuille a donc les caractéristiques suivantes :

- Même probabilité de défaut p pour chaque crédit
- Même perte en cas de défaut pour chaque crédit
- Même coefficient de corrélation linéaire ρ entre les différents crédits

8. Distance au capital pour les institutions financières

Les institutions financières, les banques en particulier ont un rapport au défaut qui diffère de celui des entreprises industrielles et commerciales. En effet, des actions du régulateur et des organes de supervision précèdent la mise en faillite d'une banque. Ainsi, le Comité de Bâle en charge de la supervision des banques fournit des orientations sur l'identification des banques en situation de faiblesse et sur la mise en œuvre d'actions correctives qui peuvent aller jusqu'à la résolution.

Les banques doivent, entre autres, respecter un ratio de solvabilité qui met en regard ses fonds propres et ses engagements pondérés.

L'application de la D2D aux banques se heurte à deux limites :

- Le risque associé au levier est différent de celui d'une entreprise non financière : en effet, le modèle économique d'une banque repose sur l'endettement dans la mesure où la banque est d'abord un intermédiaire entre des déposants et des emprunteurs. Ainsi, pour une notation donnée, une banque est bien plus endettée qu'une entreprise industrielle ou commerciale. Ainsi, la D2D conduirait à un score en matière de risque très élevé en raison de son levier
- La D2D suppose que les fonds propres servent de coussin. Toutefois, les régulateurs et superviseurs prennent des mesures avant que la valeur des actifs ne devienne inférieure au montant de la dette. La valeur de la dette n'est donc pas la bonne référence du défaut.

La distance au capital (D2C) est une alternative à la D2D proposée par Chan-Lau et Sy. en 2006 et qui est reprise dans un document de travail du FMI. Ainsi, le seuil fixé au ratio de solvabilité par le régulateur ou le superviseur complète le seuil de déclenchement du défaut.

En supposant, comme dans le modèle de Merton que la valeur des actifs définit un mouvement brownien géométrique, la D2C vérifie

$$D2C = \frac{\ln\left(\frac{V}{\lambda L}\right) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}} = \frac{\ln(V) - \ln(\lambda L) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}} \\ = \frac{\ln(V) - \ln(\lambda) - \ln(L) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

Où :

L = dette à court terme + 50% dette à long terme

λ = facteur de correction

Alternativement, Liu, Papakirykos, and Yuan (2004) proposent une formulation plus simple de la distance au risque D2C :

$$D2C = \frac{\left(\frac{V - \lambda L}{V}\right)}{\sigma\sqrt{t}}$$

Dans les 2 cas, D2C comme D2D, les valeurs de λ sont les suivantes :

D2D : $\lambda = 1$

D2C : $\lambda = \frac{1}{1-CAR}$

Où CAR (Capital Adequacy Ratio) est l'exigence réglementaire de ratio de solvabilité. Dans l'environnement prudentiel de Bâle 3, le CAR correspond au ratio CET1 (Core Equity Tier 1)

Et fonds propres de la banque = $V_0 - L > CAR \times V$

En supposant que les actifs sont pondérés à 100%, que le ratio CET1 de la banque considérée est égal au CET1 ou CAR réglementaire et que E, L et V sont les agrégats de la banque considérée :

$$\frac{V}{\lambda L} = \frac{(1-CAR)V}{L} = 1 \Leftrightarrow (1-CAR)V = L \Leftrightarrow (1-CAR)V = V - E \Leftrightarrow V(1-CAR) = E$$

$$\text{Ainsi } CAR = \frac{E}{V}$$

$$\text{En outre, selon la formule de Merton : } D2D - D2C = \frac{\ln(\lambda)}{\sigma\sqrt{t}} = -\frac{\ln(1-CAR)}{\sigma\sqrt{t}}$$

Conclusion

Le terme d_2 de la formule de Black & Scholes (1973), transposée par Merton (1974) à la finance d'entreprise, a une signification : c'est la distance au défaut fondée sur le rendement. Sa composante aléatoire permet d'en déduire la probabilité de défaut qui correspond à $\Phi(-d_2)$.

Ceci est en parfaite cohérence avec la formule de Black & Scholes. En effet, son terme $\Phi(d_2)$ est la probabilité d'exercice d'un call. Or, l'actionnaire qui a une option sur les actifs de l'entreprise ne va pas l'exercer si celle-ci est en faillite. La probabilité de faillite est alors égale à la probabilité de renonciation, par l'actionnaire, à l'exercice de son option, c'est-à-dire à $1 - \Phi(d_2) = \Phi(-d_2)$ du fait de la symétrie de la courbe de la densité de la loi normale centrée réduite par rapport à l'axe des ordonnées.

Ce concept est transposé aux banques, dont le ratio de solvabilité est au cœur de l'évaluation et de la prise de décision stratégique, au travers de la distance au capital.

BIBLIOGRAPHIE

Ahmad Dar A, Anuradha N and Qadir S, *Estimating probabilities of default of different firms and the statistical tests*, Journal of Global Entrepreneurship Research 9(1), 2019

Black F. et Scholes M., *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, The Journal of Political Economy, Vol. 81, No. 3 (May - Jun., 1973), pp. 637-654

Chan-Lau J. A. and Sy A. N. R., *Distance-to-Default in Banking: A Bridge Too Far?* Journal of Banking Regulation · November 2006

Crosbie P and Bohn J, *Modelling Default Risk*, Moodys KMV, 2003

Merton, R. C., *On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates*, The Journal of Finance, 29(2), 449–470, 1974

Vasicek O, *The Distribution of Loan Portfolio Value*, Risk, December 2002