

Options réelles : exemples opérationnels

Olivier Levyne (2007)
Docteur en Sciences Economiques
HDR en Sciences de Gestion

Ce polycopié aborde cinq cas d'options réelles. Le premier est consacré à l'option de différer la mise en œuvre d'un projet d'investissement. Dans la mesure où l'entreprise bénéficie de la flexibilité stratégique procurée par une telle option, le prix de revient du projet correspond au montant de l'investissement augmenté de la valeur d'une telle option. En d'autres termes, l'investissement immédiat qui revient à renoncer à cette option a un coût d'opportunité qui correspond à la valeur de l'option. La VAN du projet est donc d'autant plus faible que l'option a de la valeur. Cette catégorie d'options réelles a été étudiée par Mc Donald et Siegel (1986)¹, Paddock, Siegel et Smith (1988)², Ingersoll et Ross (1992)³.

Le second est centré sur l'option de croissance, c'est-à-dire d'entreprendre dans le futur un projet d'investissement de plus grande ampleur que celui qui est mis immédiatement en œuvre et qui vise à s'y substituer. L'option qui permet dans un premier temps de tester un marché et dans un second soit d'y investir un montant plus important, soit de se retirer a été étudiée par Myers (1977)⁴, Kester (1984⁵ et 1993⁶), Trigeorgis et Mason (1987)⁷, Trigeorgis (1988)⁸ et Pindyck (1988)⁹. Dans le cadre d'une décision d'investissement, la valeur d'une telle option s'ajoute à la VAN de l'investissement initial afin d'estimer la création de valeur créée par un projet global

Le troisième aborde l'option d'abandon c'est-à-dire la possibilité de revendre dans le futur l'actif qui est immédiatement acquis si les conditions de son exploitation ne sont finalement pas favorables : effondrement du marché du produit fabriqué, sous-estimation du coût de production... L'option qui correspond alors à un *put* a été étudiée par Myers et Majd (1990)¹⁰. La valeur d'une telle option qui permet engendre un flux de trésorerie complémentaire en cas d'exercice augmente d'autant la VAN du projet global.

Le quatrième traite de l'option d'arrêt temporaire de la production en fonction de l'évolution des prix du produit fabriqué. La possibilité de prendre périodiquement la décision de lancer ou de suspendre la production constitue un élément de flexibilité opérationnelle qui trouve des applications immédiates dans le cadre de l'évaluation de concessions d'exploitation de ressources naturelles (puits de pétrole, mines d'or...). Cette option permet de chiffrer la valeur

¹ Mc Donald et Siegel D., "The Value of Waiting to Invest", *Quarterly Journal of Economics*, 1986

² Paddock, Siegel D. et Smith J., "Options Valuation of Claims on Physical Assets : The Case of Offshore Petroleum Leases", *Quarterly Journal of Economics*, 1988

³ Ingersoll et Ross, "Waiting to Invest : Investment and Uncertainty", *Journal of Business*, 1988

⁴ Myers S., "Determinants of Corporate Borrowing", *Journal of Financial Economics*, 1977

⁵ Kester W., "Today's Options for Tomorrow's Growth", *Harvard Business Review*, 62, 1984

⁶ Kester W., "Turning Growth Options into Real Assets", in R. Aggarwal (éd), *Capital Budgeting Under Uncertainty*, Prentice Hall, 1993

⁷ Trigeorgis L. et Mason S., "Valuing Managerial Flexibility", *Midland Corporate Finance Journal*, 5, 1987

⁸ Trigeorgis L., "A Conceptual Options Framework For Capital Budgeting", *Advances in Futures and Options Research*, 3, 1988

⁹ Pindyck R., "Irreversible Investment, Capacity Choice and the Value of the Firm", *American Economic Review*, 78, 1988

¹⁰ Myers S. et Majd S., "Abandonment Value and Project Life", *Advances in Futures and Options Research*, 4, 1990

d'une concession et de fixer, en conséquence, le prix maximum qu'il est raisonnable d'avancer dans le cadre de la réponse à un appel d'offres lancé par un état. Elle a été étudiée par Mc Donald et Siegel (1985)¹¹, Brennan et Schwartz (1985)¹² et Goffin (1994)¹³. Son calcul se substitue alors à celui de la VAN.

Le cinquième illustre la notion d'option d'échange d'un actif contre un autre. Elle permet de décider périodiquement de la mise en œuvre d'un processus de production lorsque les prix de la matière première et du produit fabriqué fluctuent. La valorisation d'une telle option a été présentée par Kensinger (1993)¹⁴. Elle est issue de la méthode de valorisation de l'option d'échange d'un premier actif financier contre un second proposée par Margrabe (1978)¹⁵.

1. Option de report de l'investissement

Cette option donne la possibilité à l'entreprise qui la détient de différer la date de décision de son investissement. Cette faculté de report lui permet d'investir dans l'hypothèse où certains éléments favorables se sont produits entre la date à laquelle elle lui est consentie et sa date d'échéance.

A titre illustratif, une entreprise envisage de réaliser un investissement d'une valeur de 1 200 M€ qui génèrera chaque année un flux de trésorerie annuel, soit de 130 M€ avec une probabilité de 50%, soit de 70 M€ avec une probabilité de 50%, en fonction de l'issue de la réponse à un appel d'offres qui vient d'être lancé. Si l'investissement avait été réalisé au début de l'exercice qui se termine, le flux de trésorerie généré aurait été de 100 M€.

L'évolution des flux de trésorerie peut alors être schématisée comme suit :

Graphique n°10 : exemple d'évolution des flux de trésorerie générés par un projet

	100	130	130	130...
t	0	1	2	3 ...

Si l'entreprise a la possibilité de décaler son investissement d'un an, elle connaîtra le flux de trésorerie annuel avec certitude. Ainsi, en cas d'échec à l'appel d'offres, le flux de trésorerie annuel sera de 70 M€ et, sur la base d'un taux d'actualisation de 8%, la valeur du projet de $70/8\% = 875$ M€ sera inférieure à son coût de revient. Il devra donc être abandonné.

¹¹ Mc Donald et Siegel D., "Investment and the valuation of Firms when there is an option to Shut Down", *International Economic Review*, 1985

¹² Brennan M. et Schwartz E., "Evaluating Natural Resource Investment", *Journal of Business*, 1985

¹³ Goffin R., "L'application de la théorie des options aux choix des investissements des entreprises", *Banque et Marchés*, juillet-août 1994

¹⁴ Kensinger J., "Valuing Flexible Manufacturing Facilities as Options to Exchange Assets", *23rd annual meeting of the Financial Management Association*, Toronto, 1993

¹⁵ Margrabe W., "The Value of an Option to Exchange one Asset for another", *Journal of Finance*, n°1, 1978

La flexibilité stratégique procurée par la possibilité de décaler l'investissement d'un an crée une valeur qui peut être valorisée à l'aide de l'approche binômiale.

Le taux sans risque est fixé à 5%.

Dans ce cas, la valeur du projet s'établit :

- En $t = 0$ à : $\frac{(130 \times 50\%) + (70 \times 50\%)}{8\%} = 1\,250 \text{ M€}$.
- En $t = 1$:
 - soit à $\frac{130}{8\%} = 1\,625 \text{ M€}$ avec une probabilité de 50% ;
 - soit à $\frac{70}{8\%} = 875 \text{ M€}$ avec une probabilité de 50%.

Dès lors, le projet génère :

- soit une plus-value de $1\,625 - 1\,250 = 375 \text{ M€}$ qui correspond à 30% de la valeur du projet ;
- soit une plus-value de $875 - 1\,250 = -375 \text{ M€}$ soit -30% de la valeur du projet.

La prise en compte du taux de *cash flow* ($100/1\,250 = 8\%$) permet de déterminer le rendement du projet qui s'établit :

- soit à $30\% + 8\% = 38\%$;
- soit à $-30\% + 8\% = -22\%$.

Il est alors possible de déterminer la probabilité risque-neutre p :

$$38\%p - 22\%(1-p) = 5\% \text{ donc } p = 45\%.$$

Finalement, la valeur de l'option - qui correspond à la valeur actualisée au taux sans risque de l'espérance de valeur intrinsèque à l'échéance - s'établit à :

$$\frac{45\% \times (1625 - 1200) + 55\% \times (875 - 1200)}{(1 + 8\%)} = 182 \text{ M€}.$$

Par conséquent, l'investissement immédiat qui conduit à renoncer à cette valeur optionnelle représente un coût d'opportunité de 182 M€. Le coût de revient global s'établit alors à $1\,200 + 182 = 1\,382 \text{ M€}$. Dans la mesure où la valeur du projet est de 1 250 M€, la VAN de ce projet s'établit alors à -132 M€, ce qui dissuade de l'investissement immédiat.

2. Option de réalisation de la seconde phase d'un projet

Cette option permet de réaliser un projet d'investissement en deux temps. Dans un premier temps, l'entreprise investit une somme relativement réduite. Si, à l'issue de cette première période qui permet de tester le marché, un événement externe se réalise (déréglementation,

réduction des coûts d'exploitation...), l'entreprise effectue un second investissement d'un montant plus significatif.

A titre illustratif, une entreprise envisage l'acquisition d'une première machine qui constitue le projet 1. Si à l'issue de la durée de vie économique et fiscale de la machine, le marché sur lequel la société opère est déréglementé, celle-ci réalisera un second investissement. Les caractéristiques des deux investissements sont synthétisées dans le tableau ci-après :

Tableau n°10 : exemple de caractéristiques d'un investissement en deux phases

Hypothèses			
Caractéristiques du projet 1 (1ère phase d'investissement)			
Investissement	1 200		
CF annuel	130		
Durée de vie du projet	5	ans	
Taux d'actualisation	8%		
Caractéristiques du projet 2 (2ème phase d'investissement)			
Investissement	15 000		
Valeur des CF futurs actualisés lors de l'investissement	10 000		
Horizon de la mise en œuvre du projet	5	ans	
Volatilité des actions des sociétés du secteur	30%		
Taux sans risque	5%		

NB : CF (*cash flow*) = flux de trésorerie

La VAN du projet 1 est égale à $-1\ 200 + 130 \cdot \frac{1 - (1 + 8\%)^{-5}}{8\%} = -681$.

Le projet global pourra toutefois être entrepris si la valeur de l'option associée au projet 2 compense la VAN négative du projet 1. Son prix d'exercice est de 10 000.

En outre, l'actif sous-jacent (flux de trésorerie futurs générés par le projet) est évalué à 10 000 à la date de réalisation (éventuelle) de l'investissement. Par conséquent, sa valeur actualisée à la date d'évaluation de l'option est égale à $\frac{10000}{(1 + 8\%)^5} = 6\ 806$.

La connaissance des autres paramètres (volatilité de 30%, durée restant jusqu'à l'échéance de 5 ans, taux sans risque de 5%) permet de valoriser cette option par la formule de Black and Scholes :

$$d_1 = \frac{\ln \frac{6806}{10000} + (0,05 + \frac{0,30^2}{2}) \cdot 5}{0,30 \cdot \sqrt{5}} = -0,47$$

$$d_2 = -0,47 + 0,30 \sqrt{5} = -1,14$$

Finalemment :

$$C = 6\ 806 \cdot \Phi(-0,47) - 10\ 000 \cdot e^{-0,05 \times 5} \cdot \Phi(-1,14) = 689$$

La VAN globale des projets 1 et 2 ressort alors à $-681+689 = 8$. Comme elle est positive, le premier projet peut être entrepris.

3. Option d'abandon

Cette option permet de réaliser un investissement risqué – c'est-à-dire dont les flux de trésorerie futurs sont aléatoires – avec la possibilité de revendre l'objet de l'investissement à un prix connu à l'avance en cas de survenance d'un événement externe défavorable (réglementation plus contraignante, dérapage des coûts de production).

Cette option correspond à un *put* dont le prix d'exercice est le montant auquel l'objet de l'investissement peut être revendu.

A titre illustratif, une entreprise envisage de réaliser un investissement d'une valeur de 1 250 M€ qui génèrera chaque année un flux de trésorerie annuel, soit de 130 M€ avec une probabilité de 50%, soit de 80 M€ avec une probabilité de 50%, en fonction de l'issue de la réponse à un appel d'offres qui vient d'être lancé. Si l'entreprise ne remporte pas l'appel d'offres, elle peut revendre la machine dans un an pour 1 100 M€.

L'évolution des flux de trésorerie peut alors être schématisée comme suit :

Graphique n°11 : exemple d'évolution des flux de trésorerie d'un projet d'investissement dans le cadre d'un appel d'offres

t	0	1
	100	130 80

Dans ce cas, la valeur du projet s'établit en $t = 1$:

- soit à $\frac{130}{8\%} = 1\,625$ M€ avec une probabilité de 50% ;
- soit à $\frac{80}{8\%} = 1\,000$ M€ avec une probabilité de 50%.

Sa valeur espérée ressort alors à $(50\% \times 1\,625) + (50\% \times 1\,000) = 1\,313$ M€

Dès lors, le projet génère :

- soit une plus-value de $1\,625 - 1\,250 = 375$ M€ qui correspond à 30% de la valeur du projet ;
- soit une plus-value de $1\,000 - 1\,250 = -250$ M€ soit -20% de la valeur du projet.

La prise en compte du taux de flux de trésorerie (8%) permet de déterminer le rendement du projet qui s'établit :

- soit à $30\% + 8\% = 38\%$;

- soit à $-20\% + 8\% = -12\%$.

Il est alors possible de déterminer la probabilité risque-neutre p :

$$38\%p - 12\%(1-p) = 5\% \text{ donc } p = 34\%.$$

Finalement, la valeur de l'option - qui correspond à la valeur actualisée au taux sans risque de l'espérance de valeur intrinsèque à l'échéance - s'établit à :

$$\frac{34\% \times (1625 - 1250) + 66\% \times (1000 - 1250)}{(1 + 8\%)} = 63 \text{ M€}.$$

4. Option d'arrêt temporaire

Cette option permet de calculer la valeur d'un projet d'investissement qui donne lieu à l'exploitation d'une machine ou d'une concession pendant une période de temps fixé. L'investissement envisagé permet de commercialiser un produit dont la volatilité du prix de marché est connue.

En outre, l'entreprise pourra décider, périodiquement (par exemple chaque année), en fonction des conditions d'exploitation connues d'avance et de l'évolution du produit, de mettre la machine en exploitation ou d'exploiter la concession (par exemple en procédant à l'extraction d'une matière première si son prix de marché est supérieur à son coût de revient).

Cette flexibilité opérationnelle crée une valeur d'option dans la mesure où l'exploitation est mise en œuvre uniquement lorsque, sur la base du prix de marché à la date de la décision qui doit être prise, le prix de vente du produit est supérieur à son coût de revient. Dans le cas contraire, la production est arrêtée.

Le projet envisagé correspond par conséquent à un portefeuille de n calls, n étant le nombre de dates auxquelles l'entreprise prend une décision sur la poursuite ou l'arrêt de l'exploitation. Les caractéristiques de chaque call sont les suivantes :

- valeur de l'actif sous-jacent : prix de vente comptant du produit fabriqué ;
- prix d'exercice : coût de revient de la production ;
- date d'échéance : date de décision de poursuite ou d'arrêt de l'exploitation.

A titre illustratif, une entreprise envisage de répondre à un appel d'offre sur l'exploitation d'une concession pour une durée de 10 ans relative à un gisement de matière première dont le prix de marché est actuellement de 25 € par unité extraite pouvant être revendue. Son coût de revient unitaire est de 20 € et la volatilité de son prix de marché est estimée à 30%. La capacité de production annuelle est de 200 000 unités.

Le taux sans risque continu est de 5% et le taux de *convenience yield* continu, c'est à dire l'avantage à détenir un stock de la matière première qui peut être extraite, est de 0,06%. Ce taux correspond au taux de dividende (exprimé par le rapport entre le dividende versé et le cours de l'action sous-jacente) d'une option financière.

L'entreprise pourra, périodiquement, en fonction des conditions de marché de la matière première, décider d'exploiter la concession ou d'arrêter la production.

Les frais de mise en exploitation ou d'arrêt de l'exploitation sont supposés négligeables.

Hypothèse 1 : la décision est prise une fois par an. Dans ce cas, le projet correspond à un portefeuille de 10 options dont le prix d'exercice est de 20 € et le cours comptant de l'actif sous-jacent de 25 €. La première option doit être exercée immédiatement. Elle n'a donc pas de valeur temps. Sa prime est donc égale à sa valeur intrinsèque de 5 € par unité extraite, soit 1 M€ pour la totalité de la production de l'année.

Les 9 autres options sont évaluées par la formule de Black and Scholes (1973)

La valeur du projet, c'est-à-dire le prix maximum qui peut figurer dans la réponse à l'appel d'offres, est la somme des valeurs des 10 options. Le détail du calcul est fourni dans le tableau ci-après :

Tableau n°11 : exemple de valorisation d'une option d'arrêt temporaire dans l'hypothèse où l'option peut être exercée une fois par an dans le cadre d'un projet à 10 ans

Rang de l'option	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	TOTAL
Date de l'évaluation	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003
Date d'échéance des options	01/01/2003	01/01/2004	01/01/2005	01/01/2006	01/01/2007	01/01/2008	01/01/2009	01/01/2010	01/01/2011	01/01/2012	
Cours comptant du sous-jacent (€)	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	
Prix d'exercice (€)	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	
Taux sans risque continu	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	
Durée restant jusqu'à l'échéance (en années)	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	
Volatilité	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	
Convenience yield = taux de dividende	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	
d1		1,06	0,97	0,97	1,00	1,04	1,07	1,11	1,15	1,19	
d2		0,76	0,55	0,45	0,40	0,37	0,34	0,32	0,30	0,29	
F(d1)		0,8551	0,8342	0,8351	0,8417	0,8500	0,8587	0,8673	0,8756	0,8834	
F(d2)		0,7759	0,7076	0,6753	0,6558	0,6426	0,6329	0,6255	0,6196	0,6148	
Valeur du call (€) par unité produite	5,000	6,603	8,027	9,216	10,254	11,178	12,017	12,780	13,481	14,128	
Valeur du call sur la totalité de la production (M€)	1,000	1,321	1,605	1,843	2,051	2,236	2,403	2,556	2,696	2,826	20,537

Variante 1 : l'option peut être exercée tous les 2 ans, soit 5 fois au total pour une période de 10 ans

Tableau n°12: exemple de valorisation d'une option d'arrêt temporaire dans l'hypothèse où l'option peut être exercée une fois tous les deux ans dans le cadre d'un projet à 10 ans

Rang de l'option	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	TOTAL
Date de l'évaluation	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003						
Date d'échéance des options	01/01/2003	01/01/2005	01/01/2007	01/01/2009	01/01/2011						
Cours comptant du sous-jacent (€)	25	25	25	25	25						
Prix d'exercice (€)	20	20	20	20	20						
Taux sans risque continu	5,0%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%						
Durée restant jusqu'à l'échéance (en années)	0,0	2,0	4,0	6,0	8,0						
Volatilité	30%	30%	30%	30%	30%						
Convenience yield = taux de dividende	0%	0%	0%	0%	0%						
d1		0,97	1,00	1,07	1,15						
d2		0,55	0,40	0,34	0,30						
F(d1)		0,8342	0,8417	0,8587	0,8756						
F(d2)		0,7076	0,6558	0,6329	0,6196						
Valeur du call (€) par unité produite	5,000	8,027	10,254	12,017	13,481						
Valeur du call sur la totalité de la production (M€)	2,000	3,211	4,101	4,807	5,392						19,511

Variante 2 : l'option peut être exercée tous les 5 ans, soit 2 fois au total pour une période de 10 ans

Tableau n°13 : exemple de valorisation d'une option d'arrêt temporaire dans l'hypothèse où l'option peut être exercée une fois tous les cinq ans dans le cadre d'un projet à 10 ans

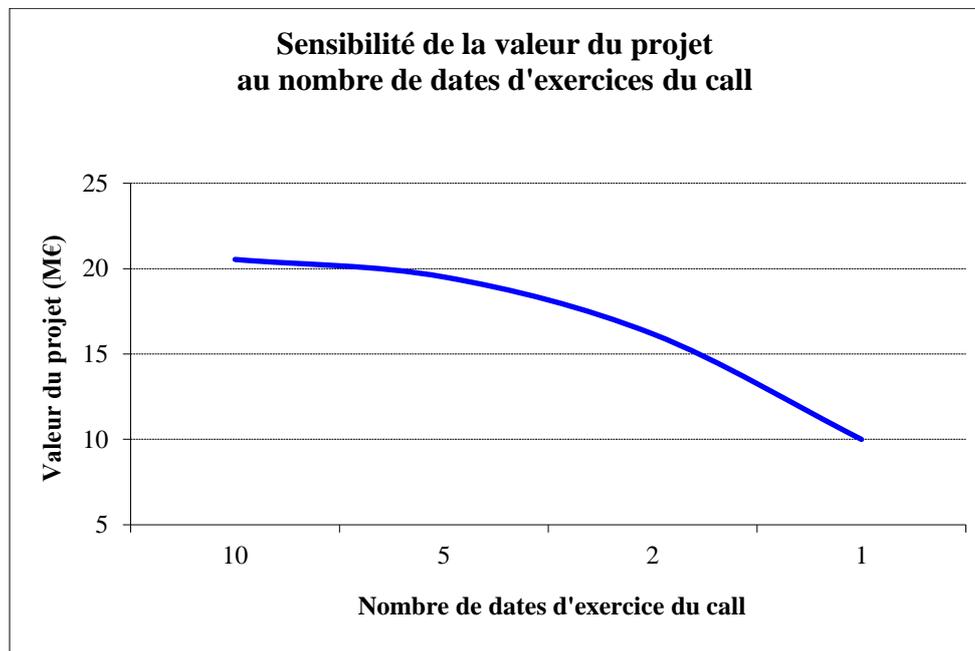
Rang de l'option	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	TOTAL
Date de l'évaluation	01/01/2003	01/01/2003									
Date d'échéance des options	01/01/2003	01/01/2008									
Cours comptant du sous-jacent (€)	25	25									
Prix d'exercice (€)	20	20									
Taux sans risque continu	5,0%	5,00%									
Durée restant jusqu'à l'échéance (en années)	0,0	5,0									
Volatilité	30%	30%									
Convenience yield = taux de dividende	0%	0%									
d1		1,04									
d2		0,37									
F(d1)		0,8500									
F(d2)		0,6426									
Valeur du call (€) par unité produite	5,000	11,178									
Valeur du call sur la totalité de la production (M€)	5,000	11,178									16,178

Ces différents résultats montrent que plus la flexibilité diminue plus la valeur de l'option est faible.

Le cas extrême correspond d'ailleurs à celui dans lequel l'option peut seulement être exercée une fois tous les 10 ans, c'est-à-dire lors de l'acquisition de la machine. Dans cette hypothèse, la valeur du projet correspond à la valeur intrinsèque de l'option puisque celle-ci doit être exercée immédiatement et est, par conséquent, dépourvue de valeur temps. Or, le droit de produire pour 20 € un bien qui peut être revendu 25 € vaut intrinsèquement 5 €. Aussi, pour une exploitation de 10 ans d'une machine dont la capacité de production est de 200 000 unités par an soit 2 000 000 d'unités pour l'ensemble de la période, la valeur du projet correspondant à un portefeuille de *calls* est de 10 M€.

Le graphique ci-dessous synthétise ces différents résultats.

Graphique n°12 : synthèse des résultats relatifs à l'option d'arrêt temporaire



En outre, pour un niveau de flexibilité donné, la valeur du projet est d'autant plus importante que la volatilité du prix du produit fini est élevée. Ce phénomène, en ligne avec le fait que le *véga* d'un call est positif, est illustré par le tableau ci-après dans lequel figure la valeur du projet pour différents niveaux de volatilité :

Tableau n°14 : sensibilité de la valeur du projet à la volatilité du prix des produits finis

Hypothèse de volatilité	Valeur du projet (M€)
1%	17,599
10%	17,638
20%	18,619
30%	20,537
50%	25,073
75%	30,418
100%	34,761

Si la production, toujours de 200 000 repose sur l'exploitation de 4 machines dont les coûts de revient unitaires sont respectivement de 10 €, 20 €, 30 € et 40 € et si la capacité de production de chaque machine est de 50 000 unités, la décision périodique de mise en exploitation porte sur chaque machine.

Ainsi, pour un prix de vente unitaire de 25 €, seules les machines dont le prix de revient est de 10 € et de 20 €. sont immédiatement utilisées. Les 2 autres ne seront pas exploitées au cours de la première année.

Les primes des options d'utilisation de ces 2 machines au cours de la première année, qui se réduisent à leurs valeurs intrinsèques sont donc nulles.

Tableau n°15 : simulation de la valorisation du projet sur la base d'une hypothèse de prix de vente des produits finis

Détermination de la valeur du projet											
Périodicité d'exercice : exercice tous les (ans)											1
Première machine											
Rang de l'option	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
Date de l'évaluation	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003
Date d'échéance des options	01/01/2003	01/01/2004	01/01/2005	01/01/2006	01/01/2007	01/01/2008	01/01/2009	01/01/2010	01/01/2011	01/01/2012	
Cours comptant du sous-jacent (€)	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	
Prix d'exercice (€)	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	
Taux sans risque continu	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	
Durée restant jusqu'à l'échéance (en années)	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	
Volatilité	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	
Convenience yield = taux de dividende	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	
d1		3,37	2,60	2,31	2,16	2,07	2,02	1,99	1,97	1,96	
d2		3,07	2,18	1,79	1,56	1,40	1,28	1,19	1,12	1,06	
F(d1)		0,9996	0,9954	0,9895	0,9845	0,9807	0,9782	0,9765	0,9756	0,9751	
F(d2)		0,9989	0,9853	0,9631	0,9401	0,9190	0,9001	0,8835	0,8689	0,8558	
Valeur du call (€) par unité produite	15,00	15,47	15,94	16,40	16,86	17,29	17,70	18,09	18,45	18,79	169,99
Valeur du call sur la totalité de la production (M€)	0,75	0,77	0,80	0,82	0,84	0,86	0,88	0,90	0,92	0,94	8,50
Périodicité d'exercice : exercice tous les (ans)											1
Deuxième machine											
Rang de l'option	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	TOTAL
Date de l'évaluation	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003
Date d'échéance des options	01/01/2003	01/01/2004	01/01/2005	01/01/2006	01/01/2007	01/01/2008	01/01/2009	01/01/2010	01/01/2011	01/01/2012	
Cours comptant du sous-jacent (€)	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	
Prix d'exercice (€)	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	
Taux sans risque continu	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	
Durée restant jusqu'à l'échéance (en années)	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	
Volatilité	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	
Convenience yield = taux de dividende	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	
d1		1,06	0,97	0,97	1,00	1,04	1,07	1,11	1,15	1,19	
d2		0,76	0,55	0,45	0,40	0,37	0,34	0,32	0,30	0,29	
F(d1)		0,8551	0,8342	0,8351	0,8417	0,8500	0,8587	0,8673	0,8756	0,8834	
F(d2)		0,7759	0,7076	0,6753	0,6558	0,6426	0,6329	0,6255	0,6196	0,6148	
Valeur du call (€) par unité produite	5,00	6,60	8,03	9,22	10,25	11,18	12,02	12,78	13,48	14,13	102,68
Valeur du call sur la totalité de la production (M€)	0,25	0,33	0,40	0,46	0,51	0,56	0,60	0,64	0,67	0,71	5,13
Périodicité d'exercice : exercice tous les (ans)											1
Troisième machine											
Rang de l'option	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	TOTAL
Date de l'évaluation	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003
Date d'échéance des options	01/01/2003	01/01/2004	01/01/2005	01/01/2006	01/01/2007	01/01/2008	01/01/2009	01/01/2010	01/01/2011	01/01/2012	
Cours comptant du sous-jacent (€)	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	
Prix d'exercice (€)	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	
Taux sans risque continu	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	
Durée restant jusqu'à l'échéance (en années)	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	
Volatilité	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	
Convenience yield = taux de dividende	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	
d1		(0,29)	0,02	0,19	0,33	0,43	0,52	0,60	0,68	0,74	
d2		(0,59)	(0,41)	(0,33)	(0,27)	(0,24)	(0,21)	(0,19)	(0,17)	(0,16)	
F(d1)		0,3847	0,5063	0,5771	0,6277	0,6672	0,6996	0,7268	0,7503	0,7709	
F(d2)		0,2766	0,3414	0,3725	0,3919	0,4056	0,4160	0,4243	0,4312	0,4370	
Valeur du call (€) par unité produite	0,00	1,72	3,38	4,79	6,03	7,15	8,18	9,13	10,00	10,81	61,19
Valeur du call sur la totalité de la production (M€)	0,00	0,09	0,17	0,24	0,30	0,36	0,41	0,46	0,50	0,54	3,06

Périodicité d'exercice : exercice tous les (ans)

1

Quatrième machine

Rang de l'option	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	TOTAL
Date de l'évaluation	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003
Date d'échéance des options	01/01/2003	01/01/2004	01/01/2005	01/01/2006	01/01/2007	01/01/2008	01/01/2009	01/01/2010	01/01/2011	01/01/2012	
Cours comptant du sous-jacent (€)	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	
Prix d'exercice (€)	40	40	40	40	40	40	40	40	40	40	
Taux sans risque continu	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	
Durée restant jusqu'à l'échéance (en années)	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	
Volatilité	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	
Convenience yield = taux de dividende	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	
d1		(1,25)	(0,66)	(0,36)	(0,15)	0,00	0,13	0,24	0,34	0,42	
d2		(1,55)	(1,09)	(0,88)	(0,75)	(0,67)	(0,60)	(0,55)	(0,51)	(0,48)	
F(d1)		0,1053	0,2541	0,3599	0,4390	0,5013	0,5524	0,5952	0,6318	0,6636	
F(d2)		0,0603	0,1387	0,1898	0,2255	0,2522	0,2731	0,2901	0,3042	0,3163	
Valeur du call (€) par unité produite	0,00	0,33	1,33	2,45	3,56	4,64	5,67	6,64	7,56	8,43	40,62
Valeur du call sur la totalité de la production (M€)	0,00	0,02	0,07	0,12	0,18	0,23	0,28	0,33	0,38	0,42	2,03
Valeur globale du projet											18,72

5. Option d'échange

On considère un projet consistant à exploiter un système de production qui consiste à transformer un actif 2 en un actif 1. L'actif 2 vaut 100€ et l'actif 1 vaut 150€ et leur volatilité respective est de 20% et de 30%. Le coefficient de corrélation linéaire est de 40%.

Le système est supposé fonctionner pendant 15 ans et être mis en exploitation chaque année si l'opération est bénéficiaire sur la base des prix de début d'année, c'est-à-dire à condition que le prix de l'actif 1 soit supérieur à celui de l'actif 2. Par conséquent, la société concernée dispose d'une option d'échange de l'actif 2 contre l'actif 1.

Au démarrage, cette option doit être immédiatement exercée. Elle vaut donc sa valeur intrinsèque égale à 50.

Ensuite, sa valeur peut être déterminée par la formule de Margrabe (1978) remplaçant dans un premier temps, dans la formule de Black and Scholes (1973), le cours du sous-jacent par le rapport entre le prix de X_1 et celui de X_2 soit 1,5, le taux sans risque par 0% et la volatilité du sous-jacent par celle de la variable $\frac{X_1}{X_2}$.

Soit $\sigma_{\frac{X_1}{X_2}}$ cette volatilité.

$$\sigma_{\frac{X_1}{X_2}} = \sqrt{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 - 2\rho\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}} = \sqrt{0,2^2 + 0,3^2 - 2 \times 40\% \times 20\% \times 30\%} = 29\%$$

La valeur du projet correspond alors à la somme des valeurs des 15 *calls* dont les durées de vie restant jusqu'à l'échéance sont respectivement de 0, 1, 2...et 14 ans.

Pour chacune des 13 options valorisées par l'approche de Margrabe, le résultat issu de la formule de Black and Scholes doit être multiplié par la valeur de l'actif 3, c'est-à-dire par 100€.

Le tableau ci-après fait figurer pour chacune des options, les valeurs de d_1 , d_2 , $F(d_1)$, $F(d_2)$ - F représentant la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite - et celle du *call* par la

formule de Margrabe (1978). A titre d'exemple, si la maturité de l'option est de 2 ans, les valeurs respectives de d_1 et d_2 sont de 1,2 et 0,8 dont les images par la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite sont de 0,89 et 0,79. Dans ce cas, la valeur de l'option d'échange de l'actif 2 contre l'actif 1 vaut 54,07€. Au total, la valeur globale des 15 options, c'est-à-dire du projet est de 984,83€.

Tableau n°16 : simulation de la valeur d'un projet assimilé à 15 options d'échange

Maturité	d1	d2	F(d1)	F(d2)	Valeur de l'option
0					50,00
1	1,56	1,27	0,94	0,90	51,23
2	1,20	0,80	0,89	0,79	54,07
3	1,07	0,57	0,86	0,72	56,95
4	0,99	0,42	0,84	0,66	59,66
5	0,95	0,31	0,83	0,62	62,18
6	0,93	0,23	0,82	0,59	64,53
7	0,91	0,16	0,82	0,56	66,73
8	0,91	0,10	0,82	0,54	68,80
9	0,90	0,04	0,82	0,52	70,76
10	0,90	-0,01	0,82	0,50	72,61
11	0,90	-0,05	0,82	0,48	74,37
12	0,90	-0,09	0,82	0,47	76,06
13	0,91	-0,12	0,82	0,45	77,66
14	0,91	-0,16	0,82	0,44	79,20
Valeur du projet					984,83

