Introduction aux options réelles et au modèle de Dixit & Pindyck (1991)

Olivier Levyne (2007)
Docteur en Sciences Economiques
HDR en Sciences de Gestion

Une option réelle est un droit et non une obligation de prendre une décision liée à un investissement dans un actif physique à une date donnée (option à l'européenne) ou pendant une période donnée (option à l'américaine) à un prix convenu à l'avance, appelé prix d'exercice.

L'option est dite réelle, par opposition aux options classiques (ou options financières) du fait que l'actif sous-jacent n'est pas financier: il ne s'agit ni de titres, ni de devises, ni de contrats à terme. En outre, contrairement aux options classiques, les options réelles ne sont pas cotées en bourse.

La décision d'exercice de l'option réelle dépend de la réalisation d'un événement non prévisible, c'est-à-dire de la valeur prise par une variable aléatoire qui définit un processus stochastique dont la valeur future ne peut être anticipée avec certitude.

L'utilisation des options réelles s'inscrit dans le cadre de la décision d'investissement en situation de risque. Leur valeur complète ou se substitue au critère traditionnel de la valeur actuelle nette (VAN).

Ingersoll et Ross (1992)[1] rappellent que même pour les projets les plus simples, avec des flux de trésorerie déterministes, la prise en compte de l'incertitude au niveau du taux d'actualisation a un effet significatif sur la décision d'investir. Ainsi, bien que l'investissement puisse être retardé par des changements imprévus au niveau des flux de trésorerie et par l'effet d'apprentissage, l'impact du taux d'intérêt est omniprésent et déterminant pour comprendre l'investissement au niveau macroéconomique. Dès lors, Ingersoll et Ross suggèrent que même ceux qui investissent naïvement en ignorant la valeur optionnelle incluse dans leurs projets et qui utilisent de simples projections de flux de trésorerie pourraient être sensibles aux options propres aux changements de coûts financiers.

Pour Markland (1992)[2], la méthode des options présente l'avantage de ne pas requérir la détermination préalable d'un taux d'actualisation.

Trigeorgis (1996)[3] présente une liste significative d'exemples de contextes de références aux options réelles. Ainsi, le droit de propriété est une option sur la possibilité d'extraire des réserves naturelles ; une licence confère l'option de développer un nouveau produit ; une usine peut contenir une option d'extension si bien qu'il suffit de réaliser un investissement additionnel en termes de capacité de production pour accroître le chiffre d'affaires de la société ; la construction d'une usine sur la base d'un prix de revient réduit mais auquel sont

[1] Ingersoll J.E. et Ross SA., "Waiting to Invest: investment and uncertainty", *Journal of Business* 65, 1992
[2] Markland J.T. "Options Theory: A New Way Forward for Exploration and Engineering Economics", Working Paper présenté au SPE Olid & Gas Economics, Finance and Management Conference, Londres, avril 1992
[3] Trigeorgis L., "Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resources Allocation", The MIT Press, 1996

associés des coûts de production relativement élevés permet de disposer d'une flexibilité consistant à réaliser dans le futur des opérations de nature à améliorer la marge opérationnelle lorsque les débouchés commerciaux du produit fabriqué sont moins bons que prévu ; certains systèmes d'exploitation offrent la possibilité de réduire voire d'annuler temporairement la production lorsque les charges opérationnelles ne sont pas couvertes ; une valeur optionnelle peut exister lorsque l'entreprise a la possibilité de terminer un projet et de vendre ses actifs sur le marché secondaire à un prix d'occasion ; la flexibilité dans le choix d'une part de la matière première (électricité, gaz), d'autre part du type de produits chimiques à fabriquer est de nature à accroître la valeur d'une usine ; l'acquisition d'une société est une option d'entrée sur un nouveau marché ; un projet de recherche fournit, à condition qu'il aboutisse, l'option de recueillir les fruits financiers de la commercialisation du produit ; la promesse d'achat ou de prix minimum pour certains produits change la distribution des profits de la société du fait de la réduction induite de son risque opérationnel ; les dettes de la société peuvent être assimilées à des options sur ses actifs.

Cette liste d'applications n'est pas exhaustive. Ainsi, Benaroch et Kauffman (1999)[4] soulignent que l'externalisation d'un projet transfère le risque d'échec sur des tiers, ce qui réduit le profil de risque de la société.

En dépit de la multiplicité des exemples d'utilisation des options réelles, il est possible de les regrouper selon sept catégories comme le proposent Amram et Kulatilaka (1999)[5]. Ainsi, il convient de distinguer les options d'attente qui confèrent la flexibilité d'attendre le moment le plus favorable pour investir, les options de croissance qui donnent la possibilité à la société de se développer sur de nouveaux marchés ou dans le cadre de nouvelles activités, les options de développement séquentiel qui consistent à diviser un projet en plusieurs phases au terme desquelles l'entreprise exerce son option de poursuivre le développement du projet si la phase qui vient de se terminer peut être considérée comme un succès, les options d'abandon qui, donnant la possibilité d'arrêter le développement d'une activité non rentable, peuvent être assimilées par l'entreprise à une police d'assurance, les options de flexibilité opérationnelle qui permettent de disposer d'un choix entre différentes matières premières et produits finis dans le cadre d'un processus industriel, les options opérationnelles qui autorisent l'arrêt temporaire de la production ou la variabilité du débit de la production en fonction des conditions de marché et enfin les options d'apprentissage qui consistent à différer un projet ou un investissement dans l'attente de nouvelles informations.

Ce chapitre est divisé en quatre sections. La première constitue une revue de la littérature sur les options réelles. Sa structure est assez largement inspirée de la classification proposée par Amram et Kulatilaka (1999). La deuxième expose le modèle de Bellalah et Levyne (2005) centré sur l'évaluation des options d'attente en présence d'information incomplète et de fiscalité. La construction de ce modèle s'inspire de la méthodologie de Dixit et Pindyck (1994) et intègre la notion de coût d'information dans le prolongement de Merton (1987). La troisième propose des études de cas d'application. La quatrième est centrée sur des tests d'hypothèses - dans le prolongement de l'approche de Dixit et Pindyck (1994) – sur l'optimalité du choix de la date de réalisation d'un investissement.

---

[4] Benaroch M. et Kaufman R.J., "A Case for Using Real Options Pricing Analysis to Evaluate Information Technology Project Investments", *Information System Research,* 10, 1999

[5] Amram M. et Kulatilaka N., "Disciplined Decisions – Aligning Strategy with the Financial Markets", *Harvard Business Review,* Jan-Fev 1999

La décision d'investissement issue de l'application du critère de la VAN, de même que l'évaluation de l'entreprise à l'aide de la méthode de l'actualisation des flux de trésorerie disponibles (*Discounted cash flows* ou DCF) supposent que les flux de trésorerie prévisionnels sont déterministes. En réalité, un certain nombre de facteurs d'incertitude conduisent l'entreprise à dégager des flux de trésorerie différents de ceux qui avaient été estimés au moment de l'établissement de prévisions.

En effet, l'intensification de la concurrence sur un marché peut rendre inéluctable une baisse des prix afin de rester compétitif ; inversement, les coûts de production et notamment le prix des matières premières (pétrole, gaz…) qui entrent dans le processus industriel peut augmenter plus fortement que prévu. Dans ce cas, l'entreprise peut souhaiter se réserver la possibilité de faire tourner son appareil de production uniquement si les conditions de marché rendent son exploitation profitable. En outre, il est parfois avantageux de réaliser un investissement en le fractionnant selon plusieurs séquences. Si une telle décision est prise au détriment de la réalisation d'économies d'échelle, elle permet de renoncer à certaines phases de l'investissement lorsque les conditions économiques se révèlent moins bonnes que prévu. De plus, le pilotage de la société peut conduire sa direction à des inflexions stratégiques. Ainsi, une activité non rentable, dont le plan d'affaires intégrait initialement des flux de trésorerie positifs, peut être abandonnée.

En somme, la prise de décision se doit d'intégrer la flexibilité opérationnelle dont dispose les société dans un contexte d'incertitude. Le risque systématique est certes pris en compte au travers du taux d'actualisation dans les approches classiques de la VAN et de la méthode DCF. Toutefois, ces approches n'intègrent pas le risque total de variation des flux de trésorerie mesuré au travers de leur volatilité.

L'approche par les options réelles est en revanche centrée sur la notion d'incertitude. Ainsi, la valeur d'un projet correspond à la somme de ses flux de trésorerie futurs actualisés augmentée de la valeur de l'option d'investir au moment le plus favorable, c'est-à-dire lorsqu'une variable d'état - telle que le prix du produit ou le coût d'une matière première - atteint une valeur critique qu'il est possible de déterminer. De facto, la capitalisation boursière intègre alors la valeur des options de croissance dont dispose la société.

L'option d'investir au moment opportun, l'option de croissance, l'option de réaliser un investissement en plusieurs séquences, l'option d'abandon et l'option d'échange sont largement abordées par la littérature financière. Le point commun de ces différentes catégories d'options réelles est de considérer qu'une variable d'état ne peut être considérée comme déterministe. En effet, soit celle-ci définit un mouvement brownien géométrique, de même que le rendement de l'action sous-jacente à une option financière dans le cadre de la formule de Black and Scholes (1973) ou de Merton (1973), soit elle fait l'objet de sauts discrets qui peuvent être décrits par un processus de Poisson.

Dans ce contexte, ce polycopié est divisé en trois parties. La première aborde, de façon synthétique, l'évaluation des options financières en temps continu, en insistant sur l'équation aux dérivées partielles qui constitue un élément central pour évaluer les options réelles. La seconde partie est centrée sur l'analogie - souvent rappelée dans les ouvrages et les articles de référence - entre les options financières et les options réelles. La troisième partie présente le modèle de Dixit & Pindyck (1991) de valorisation d'une option à maturité infinie. Cette option permet de déterminer le meilleur moment pour investir.

1. Evaluation des options financières en temps continu

L'évaluation des options financières en temps continu repose essentiellement sur les formules de Black and Scholes (1973) [6] et de Merton (1973) [7]. La première intègre une hypothèse de distribution de dividendes en temps discret, alors que la seconde considère que la distribution est réalisée en temps continu.

1.1 Formule de Black and Scholes avec dividendes en temps discret

La valorisation des options par la formule de Black and Scholes (1973) suppose que le cours S de l'action sous-jacente définit un mouvement brownien géométrique qui est un cas particulier de processus d'Ito.

Ainsi : dS = $\mu S dt + \sigma S dz$ [1]

où μ désigne le rendement espéré de l'action (déterminé à partir du MEDAF) et σ sa volatilité. Par ailleurs :

dz = $\varepsilon\sqrt{dt}$ [2]

où ε suit une loi normale centrée réduite.

Or, le lemme d'Ito permet d'obtenir une expression d'une fonction de 2 variables :

- l'une, *x*, qui définit un processus d'Ito. En d'autres termes :
  dx = a(x,t).dt + b(x,t).dz [3]

- l'autre, *t*, qui représente le temps que l'on suppose divisible en une infinité de petites périodes dt :

$$dF(x,t) = [\frac{\partial F}{\partial t} + a(x,t)\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2}b^2(x,t)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}].\mathrm{dt} + b(x,t).\frac{\partial F}{\partial x}.dz \qquad [4]$$

En outre, la prime d'un *call* (à ce stade européen) est une fonction :

- du cours de l'actif sous-jacent (sa variation impacte directement la valeur intrinsèque de l'option) dont on suppose qu'il définit un mouvement brownien géométrique ;

---

[6] Black F. et Scholes M. : "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, mai-juin 1973

[7] Merton R., "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, printemps 1975

- de la durée restant jusqu'à l'échéance de l'option : le passage du temps réduit la valeur temps de l'option.

Ainsi, en notant C(S,t) la prime du *call*, il convient de remplacer, dans la formule du lemme d'Ito :

- a(x,t) par μS ;
- b(x,t) par σS .

Dans ce cas, la formule du lemme d'Ito devient :

$$dC(S,t) = [\frac{\partial C}{\partial t} + \mu S.\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}.\sigma^2 S^2.\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}].\text{dt} + \sigma S.\frac{\partial C}{\partial S}.dz \qquad [5]$$

La formule de Black and Scholes est issue de la constitution d'un portefeuille d'arbitrage, c'est-à-dire non risqué. Or, dans l'expression de d(S,t), seul le dernier terme, $\sigma S.\frac{\partial C}{\partial S}.dz$ a une composante aléatoire (dz est en effet égal à $\varepsilon\sqrt{dt}$ où ε suit une loi normale centrée réduite).

Par conséquent, en supposant que les réalisations de dz sont les mêmes pour l'option et pour l'action sous-jacente, le portefeuille sera sans risque si les termes en dz se compensent à savoir :

- $\sigma S.\frac{\partial C}{\partial S}.dz$, issu de la formule de la variation de la prime de l'option ;
- $\sigma S.dz$. issu de la formule de la variation du cours de l'action sous-jacente.

Il convient alors de composer le portefeuille de :

- 1 option vendue ;
- $\frac{\partial C}{\partial S}$ actions achetées.

Soit P la valeur du portefeuille ainsi constitué :

$$P = -C + \frac{\partial C}{\partial S}.S. \qquad [6]$$

Dès lors :

$$dP = -dC + \frac{\partial C}{\partial S}.dS = -[\frac{\partial C}{\partial t} + \mu S.\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}.\sigma^2 S^2.\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}].\text{dt} - \sigma S.\frac{\partial C}{\partial S}.dz + \frac{\partial C}{\partial S}[\mu S.dt + \sigma S.dz]$$

En simplifiant par $\mu S.\frac{\partial C}{\partial S}dt$ et par $\sigma S.\frac{\partial C}{\partial S}.dz$,on obtient :

$$dP = [-\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{1}{2}.\sigma^2 S^2.\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}].\text{dt}. \qquad [7]$$

Or ce portefeuille est, par hypothèse, non risqué. Il rapporte donc le taux sans risque *r*, homogène avec l'intervalle de temps *dt*. Il est alors possible d'écrire :

$$[-\frac{\partial C}{\partial t}-\frac{1}{2}.\sigma^2 S^2.\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}].\mathrm{dt} = [-\mathrm{C} + \frac{\partial C}{\partial S}.\mathrm{S}]\mathrm{r.dt}$$

Dès lors, en simplifiant par dt :

$$[-\frac{\partial C}{\partial t}-\frac{1}{2}.\sigma^2 S^2.\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}] = [-\mathrm{C} + \frac{\partial C}{\partial S}.\mathrm{S}].\mathrm{r}$$

Finalement :

$$\frac{\partial C}{\partial t}+rS.\frac{\partial C}{\partial S}+\frac{1}{2}.\sigma^2 S^2.\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \mathrm{rC} \qquad [8]$$

Cette équation [8] aux dérivées partielles (*Fundamental Partial Differential Equation of Contingent Claims*), dont la résolution fournit la formule de Black and Scholes, ne contient pas le paramètre μ. Elle est donc indépendante de l'espérance de rendement de l'investisseur, qui elle-même est fonction de son degré d'aversion au risque. Dans ce contexte, la formule de Black and Scholes se situe en univers risque-neutre.

La résolution de l'équation aux dérivées partielles est conditionnée par les hypothèses suivantes :

- à l'échéance, le *call* vaut max(0,S_T-E) où S_T est le cours du sous-jacent à l'échéance. Par conséquent sa valeur actuelle est e^{-rT}. ;
- S_T suit une loi log-normale de paramètres (r-$\frac{\sigma^2}{2}$)T et $\sigma\sqrt{T}$ en univers risque neutre.

La résolution de l'équation aux dérivées partielles conduit à :

$$\mathrm{C} = \mathrm{S}\Phi(\mathrm{d}_1)-\mathrm{E}e^{-\mathrm{r}'\tau}\Phi(\mathrm{d}_2) \qquad [9]$$

avec : $\mathrm{d}_1 = \dfrac{\ln\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{E}} + (\mathrm{r}'+\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$ [10]

et $\mathrm{d}_2 = \mathrm{d}_1 - \sigma\sqrt{\tau}$ [11]

$$\Phi(\mathrm{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \qquad [12]$$

τ est la durée jusqu'à l'échéance de l'option exprimée en années.
r' est le taux sans risque (OAT) continu : si le taux discret est noté r, alors r' = ln(1+r).
σ est la volatilité de l'action sous-jacente. Elle peut être déterminée selon 2 modalités :

- Volatilité historique : dans ce cas, la volatilité correspond à l'écart type du rendement de l'action. Soit S_t le cours de l'action à la date t, rt son rendement en temps discret et r't son rendement en temps continu..

  Il a été établi, au chapitre 2, que : $r'_t = \ln \frac{S_t}{S_{t-1}}$. [13]

  Par conséquent :

  $$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(r'_t - \bar{r}')^2} \quad [14]$$

  avec $\bar{r}' = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} r'_t$ [15]

- Volatilité implicite : dans ce cas, la prime est supposée connue. La volatilité est alors la seule inconnue de la formule de Black and Scholes.

  La prime C du *call* est une fonction de 5 paramètres, avant prise en compte des dividendes futurs : S, E, r, τ, σ. En d'autres termes, il existe une fonction F telle que :

  C = F(S, E, r, τ, σ).

  Dès lors, si la valeur de C est connue, il est possible d'écrire :

  $\sigma = F^{-1}(S, E, r, \tau, C)$.

Exemple :

Valorisation par la formule de Black and Scholes du *call* de prix d'exercice 65€ sur Aventis, échéance 12/02/2003. On suppose en outre que :
- la volatilité de l'action Aventis est de 58% ;
- le taux sans risque est de 4,684%.

S = 58,8€
E = 65€
r = 4,684% ⇒ r' = taux continu = ln(1+4,684%) = 4,58%
σ = 58%
$\tau = \frac{80}{365}$

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{58,8}{65}) + (0,0458 + \frac{0,58^2}{2})(\frac{80}{365})}{0,58\sqrt{\frac{80}{365}}} = -0,20$$

$$d_2 = -0,20 - 0,58\sqrt{\frac{80}{365}} = -0,47$$

Φ(-0,20) = 1 - Φ(0,20) = 1 – 0,5793 = 0,4207

$\Phi(-0{,}47) = 1 - \Phi(0{,}47) = 1 - 0{,}6808 = 0{,}3192$

$$C = 58{,}8 \times 0{,}4207 - 65 \times e^{-0{,}0458 \times (\frac{80}{365})} \times 0{,}3192 = 4{,}2€$$

F. Black (1975)[8] propose une méthode de valorisation de l'option qui prend en compte la baisse du cours de l'action sous-jacente lors du versement du dividende.

Dans la mesure où le propriétaire d'un *call* n'a pas droit aux dividendes tant que l'option n'est pas exercée, il convient, si le sous-jacent verse un dividende avant la date d'échéance de l'option, de remplacer - dans la formule de Black and Scholes - S par

$S' = S - De^{-r'\tau'}$ [16]

avec $r' = \ln(1+r)$ [17]

où r désigne le taux des OAT.

et τ' qui correspond à la durée restant jusqu'à la date de versement du dividende exprimé en années. En d'autres termes :

$$\tau' = \frac{Dd - Dv}{365} \quad [18]$$

avec :

Dd = date de détachement du dividende

Dv = date de valorisation de l'option.

1.2 Formule de Black and Scholes avec dividendes en temps continu

R. Merton (1973) propose une variante qui prend s'appuie sur une hypothèse de versement de dividende en continu au taux q.

Dans ce cas, le versement du dividende réduit le taux de croissance du cours de l'action.

En d'autres termes, si le cours de l'action passe - entre la date $t = 0$ et $t = T$ - de S à S_T, en présence de distribution de dividendes, celui-ci aurait été porté de S à $S_T.e^{q\tau}$ en l'absence de distribution.

Par conséquent, en l'absence de distribution, le cours S_T aurait été obtenu en $t = T$ si le cours de l'action en $t=0$ avait été égal $S.e^{-q\tau}$.

Il convient alors de revenir à la formule initiale de Black and Scholes – qui n'intègre pas l'effet de la distribution de dividendes - et de remplacer S par $S.e^{-qt}$.

[8] Black F., "Fact and Fantasy in the Use of Options", *Financial Analysts Journal*, juillet-août 1975

Dans ce cas :

$$C = S.e^{-q\tau}.\Phi(d_1) - E.e^{-r'\tau}\Phi(d_2) \qquad [19]$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S.e^{-q\tau}}{E} + (r' + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = \frac{\ln\frac{S}{E} + \ln e^{-q\tau} + (r' + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = \frac{\ln\frac{S}{E} - q\tau + (r' + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

Finalement :

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S}{E}(r' - q + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \qquad [20]$$

et $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$. [21]

Hsia (1981)[9] a établi la convergence de la formule de Black and Scholes vers la première proposition de Modigliani et Miller (1958), ce qui souligne la forte imbrication de l'ensemble de la théorie financière. La présentation détaillée de cette convergence est fournie en annexe.

La formule de Cox, Ross et Rubinstein (1977) [10] - qui suppose que l'évolution du cours de l'action sous-jacente à l'option définit un processus stochastique en temps discret - constitue une alternative à la formule de Black and Scholes (1973). Dans la mesure où la formule de Cox, Ross et Rubinstein (1977) n'est qu'exceptionnellement utilisée dans la littérature consacrée aux options réelles - utiles dans le cadre du processus d'investissement – cette formule est uniquement présentée, pour mémoire, en annexe. En outre, Cox, Ross et Rubinstein (1977) ont établi la convergence de leur formule vers celle de Black and Scholes (1973).

1.3 Option financière et valorisation des capitaux propres

Galai et Masulis (1976)[11] sont les premiers à avoir utilisé les options pour valoriser les capitaux propres et les dettes de l'entreprise. Ainsi, en considérant que les capitaux propres constituent un *call* sur les actifs de l'entreprise dont le prix d'exercice est la valeur nominale de la dette, l'application de la formule de Black and Scholes (1973)permet d'obtenir la valeur des capitaux propres sur la base des notations habituelles suivantes :

S : valeur économique des capitaux propres
V : valeur économique des actifs
E : prix d'exercice du call sur l'exercice qui correspond à la valeur nominale de la dette
σ : volatilité des actifs de l'entreprise

---

[9] Hsia CC., "Coherence of the Modern Theories of Finance", *Financial Review*, Winter 1981

[10] Cox J., Ross S., Rubinstein M., "Options Pricing : A Simplified Approach", *Journal of Financial Economics*, octobre 1979

[11] Galai D. et Masulis R., "The Option Pricing Model and the Risk Factor of Stock", *Journal of Financial Economics*, 3, 1976

τ : durant restant jusqu'à l'échéance de la dette, exprimée en années
r : taux sans risque
D : valeur économique de la dette

$$d_1 = \frac{\ln\frac{V}{E} + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \qquad [22]$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau} \qquad [23]$$

Dès lors :

$$S = V\Phi(d_1) - Ee^{-r\tau}\Phi(d_2) \qquad [24]$$

Par ailleurs, les dérivées partielles de la formule de Black and Scholes permettent d'expliquer la sensibilité de la valeur des capitaux propres.

Ainsi, le *delta* du call - $\Phi(d_1)$ - est compris entre 0 et 1 puisqu'il s'agit de l'image d'un nombre réel (d_1) par la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite c'est-à-dire d'une probabilité. Donc $\Phi(d_1) = \frac{\partial S}{\partial V} > 0$. En d'autres termes, la valeur des capitaux propres augmente avec celle des actifs.
De même, ici :

rhô = $\frac{\delta S}{\delta r} = \tau . Ee^{-r\tau}\Phi(d_2) > 0$ car $\tau > 0$, $E > 0$, $e^{-r\tau} > 0$ et $\Phi(d_2) > 0$. Donc la valeur des capitaux propres augmente avec le taux sans risque alors que, dans le cadre de la méthode DCF, l'augmentation du taux sans risque augmente le taux d'actualisation et réduit ainsi la valeur des capitaux propres ;

Véga = $\frac{\delta S}{\delta \sigma} = V.f(d_1).\sqrt{\tau} > 0$ car $V > 0$ par hypothèse, $f(d_1) > 0$ car f est une densité de probabilité et $\sqrt{\tau} > 0$. Donc, la valeur des capitaux propres augmente avec le risque.

Théta = $\frac{\delta S}{\delta \tau} = r.Ee^{-r\tau}\Phi(d_2) + S.f(d_1).\frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}} > 0$ en tant que somme de deux entités positives. Ainsi, la valeur des capitaux propres augmente avec la durée de vie probable de ses actifs.
Il est par ailleurs possible d'établir que $\frac{\delta S}{\delta E}$ est négatif. Cela signifie que la valeur des capitaux propres diminue lorsque celle de la dette augmente.

En outre, dans la mesure où la valeur de la dette correspond à la valeur des actifs dont est soustraite la valeur des capitaux propres, il est possible d'écrire :

$D = V - S$.

Dès lors :

$\frac{\delta D}{\delta V} = \frac{\delta V}{\delta V} - \frac{\delta S}{\delta V} = 1 - \frac{\delta S}{\delta V}$. Or, comme $0 < \frac{\delta S}{\delta V} < 1$, on peut en déduire que : $0 < 1 - \frac{\delta S}{\delta V} < 1$. Par conséquent la valeur de la dette augmente avec celle des actifs.
De plus,
$\frac{\delta D}{\delta r} = \frac{\delta V}{\delta r} - \frac{\delta S}{\delta r} = -\frac{\delta S}{\delta r} < 0$. Par conséquent, la valeur de la dette diminue lorsque le taux d'intérêt augmente.
$\frac{\delta D}{\delta \sigma} = \frac{\delta V}{\delta \sigma} - \frac{\delta S}{\delta \sigma} = -\frac{\delta S}{\delta \sigma} < 0$. Par conséquent, la valeur de la dette diminue lorsque le risque sur les actifs, c'est-à-dire leur volatilité, augmente.

2. Analogie entre les options financières et les options réelles

Selon Amram et Kulatilaka (1999)[12], les options réelles constituent une extension de la théorie des options financières aux options sur des actifs réels, c'est-à-dire non financiers.

Comme les options sur les actifs financiers, les options réelles impliquent, selon Trigeorgis (1993)[13] des décisions discrétionnaires ou des droits d'acquérir ou d'échanger un actif à un prix connu à l'avance.

De même, selon Copeland et Antikarov (2001)[14], une option réelle est un droit et non une obligation de prendre une décision (telle que retarder un investissement, étendre, réduire ou abandonner une activité) à un prix déterminé appelé prix d'exercice, pendant une période de temps donnée correspondant à la durée de vie de l'option.

Dixit et Pindyck (2001)[15] confirment qu'une société qui a une opportunité d'investissement détient quelque chose qui ressemble à une option d'achat financière, à savoir le droit et non l'obligation d'acquérir un actif qui correspond au droit d'accès au flux de profits générés par un projet à la date de son choix, dans le futur. La réalisation de l'investissement correspond alors à l'exercice de l'option d'achat.

En fait, selon Luenberger (1998)[16], tout processus qui permet de prendre le contrôle d'une activité peut être analysé comme une série d'options réelles. Ces options opérationnelles sont souvent désignées par le terme d'options réelles pour intégrer le fait qu'elles impliquent des activités réelles par opposition aux produits purement financiers comme par exemple les options de souscription réservées aux membres de la direction d'une société (*stock options*).

---

[12] Amram M. et Kulatilaka N., "Real Options – Managing Strategic Investment in an Uncertain World", Harvard Business School Press, Boston, MA, 1999
[13] Trigeorgis L., "Real Options and Interactions with Financial Flexibility", *Financial Management*, Autumn 1993
[14] Copeland TE. et Antikarov V., "Real Options – A Practitioner's Guide", Texere, New York, NY, 2001
[15] Dixit AK. et Pindyck RS., "The Options Approach to Capital Investment", in "Real Options and Investment under Uncertainty", ed ES. Schwarz et L. Trigeorgis, 2001
[16] Luenberger DG., "Investment Science", Oxford University Press, New York, NY

Dans ce contexte, Bellalah (2003)[17] propose une table de correspondance entre les paramètres des options réelles (assimilées à des options d'investir) et ceux des options financières :

Tableau n°1 : correspondance entre les paramètres de l'option réelle et de l'option financière

Option réelle d'investir	Variable	Option d'achat financière
Valeur actuelle des actifs à acquérir pour réaliser le projet	S	Prix de l'actif sous-jacent
Investissement à effectuer pour réaliser le projet	E	Prix d'exercice de l'option
Période durant laquelle la décision peut être retardée	τ	Durée restant jusqu'à l'échéance de l'option
Valeur temps de l'argent	r	Taux sans risque
Mesure du risque des actifs du projet	σ	Volatilité ou écart type des rendements de l'actif sous-jacent

3. Temps d'attente de la date optimale de l'investissement

Dixit et Pindyck (1994)[18] ont formalisé en temps continu la notion de temps d'attente c'est-à-dire du choix du moment optimal pour réaliser un investissement qui peut être reporté indéfiniment. Ce moment correspond à la date à laquelle le montant anticipé des flux de trésorerie futurs atteint une valeur critique.

Ils supposent que les flux de trésorerie - qui seront générés si l'investissement est réalisé - définissent un mouvement brownien géométrique. En d'autres termes :

$$dV = \alpha .V.dt + \sigma .V.dz \qquad [25]$$

où :

V = valeur actuelle des flux de trésorerie futurs, supposée positive ;
α = taux de croissance espéré des flux de trésorerie;
σ = volatilité des flux de trésorerie.

En outre, le montant I de l'investissement est, à ce stade, supposé fixe quelle que soit la date à laquelle il est réalisé.

Soit par ailleurs :

V* = valeur critique des flux de trésorerie futurs ;

17 Bellalah M., "Finance Moderne d'Entreprise", Seconde Edition, Economica, 2003
18 Dixit A. et Pindyck R., *Investment Under Uncertainty*, Princeton University Press, 1994, chapitre 5

μ = taux de rendement espéré de l'action qui ne verse pas de dividende et dont le cours est parfaitement corrélé à V ;
δ = taux de flux de trésorerie généré par le projet étudié.

L'hypothèse de corrélation parfaite entre l'évolution du cours de l'action et celle des flux de trésorerie du projet conduit à considérer que le taux de rendement du projet est le même que celui de l'action.

Ce rendement (μ) est la somme du taux de flux de trésorerie (δ) et du taux de plus-value (α). Ainsi :

$\mu = \alpha + \delta$ soit encore : $\delta = \mu - \alpha$. [26]

Soit F la prime de l'option d'investir à n'importe quel moment. Il s'agit d'un *call* à l'américaine sur l'actif dont le cours comptant est V, assorti d'un prix d'exercice égal à I. Si ce *call* est exercé, l'entreprise qui le détient paie I et reçoit en échange un actif qui peut être revendu pour un montant égal à V. Par conséquent, en cas d'exercice, le *call* vaut V-I c'est-à-dire sa valeur intrinsèque qui correspond à la VAN du projet. Si ce *call* est conservé, sa prime F - qui incorpore de la valeur temps - a une valeur supérieure à V- I.

Ainsi :

$F \geq V - I$, soit encore : $F + I \geq V$.

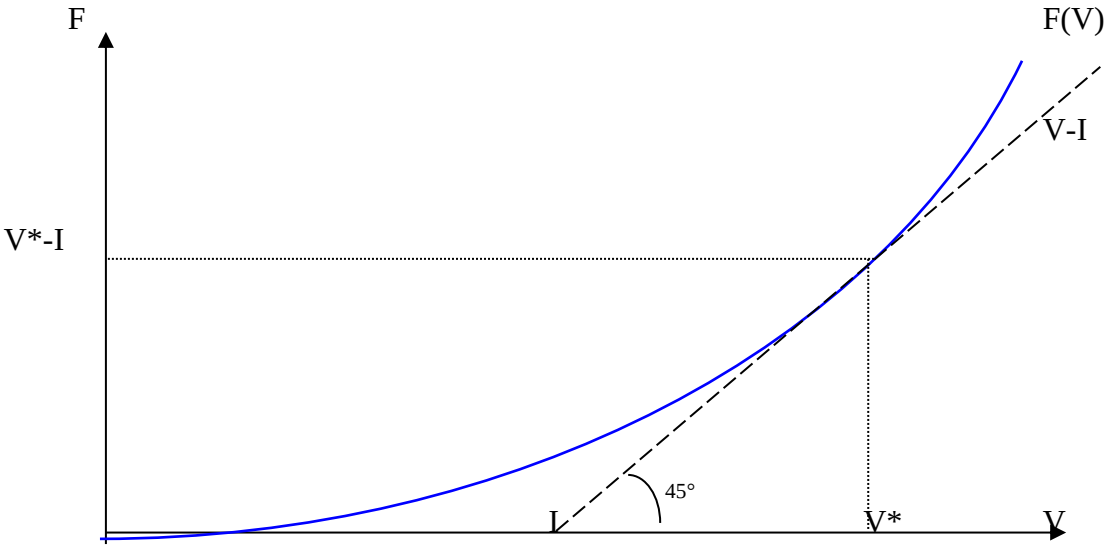
En d'autres termes, le call doit être conservé tant que le coût de revient global du projet (investissement augmenté de la prime de l'option de report) est supérieur à la valeur espérée des flux de trésorerie futurs générés par le projet.

Il peut par conséquent être exercé lorsque F = V-I c'est-à-dire au point de contact entre la courbe schématisant l'évolution de la prime F de l'option et la droite d'équation F = V-I.

L'abscisse V* de ce point de contact est la valeur critique des flux de trésorerie futurs. Par conséquent :

$$F(V^*) = V^* - I \text{ (condition aux bornes n°1, dite } \textit{value matching}\text{)}$$

Graphique n°1 : sensibilité de la valeur de d'une option d'attente
à la valeur des flux de trésorerie futurs



Or F $\geq$V- I. Donc, au point de contact la courbe est tangente à la droite d'équation F = V-I dont la pente est égale à 1. En d'autres termes, elle forme un angle de 45° avec l'axe des abscisses. Par conséquent :

F'(V*) = 1 (condition aux bornes n°2 dite *smooth pasting*)

En outre, si V = 0, la valeur des flux de trésorerie ne peut progresser. Par conséquent, le projet doit être abandonné et l'option a donc une valeur nulle. En d'autres termes :

F(0) = 0 (condition aux bornes n°3).

L'équation aux dérivées partielles issue du lemme d'Ito (et de la constitution d'un portefeuille d'arbitrage) pour un *call* sur une action dont le cours est S s'écrit.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS.\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}.\sigma^2 S^2.\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \text{rC}. \qquad [27]$$

Il convient alors, pour l'appliquer à l'option de report d'un projet, de remplacer :

- C par F ;
- S par V ;
- r par r-δ afin de prendre en compte le taux de flux de trésorerie du projet, assimilé au dividende versé par une action,

et de remarquer que le *call* n'a pas, ici, de dérivée partielle par rapport au temps puisque sa date d'échéance peut être reportée indéfiniment.

Dès lors :

$(r-\delta).V.\frac{\partial F}{\partial V}+\frac{1}{2}.\sigma^2V^2.\frac{\partial^2 F}{\partial V^2}$ = rF, soit encore :

$$\frac{1}{2}.\sigma^2V^2.F''(V)+(r-\delta).V.F'(V) \text{ - r.F(V) = 0} \qquad [28]$$

Il s'agit d'une équation différentielle homogène du second ordre dont les 3 conditions aux bornes sont :

F(V*) = V* - I, F'(V*) = 1 et F(0) = 0.

Cette équation est de la forme :

F''(x) + a.F'(x) + b.F(x) = 0 [29]
qui devient, en posant : F(x) = $e^{\lambda x}$:

$$\lambda^2.e^{\lambda x}+a.\lambda.e^{\lambda x}+b.e^{\lambda x}=0 \qquad [30]$$

ce qui revient à considérer que l'équation différentielle admet des solutions de la forme $e^{\lambda x}$.

En divisant par $e^{\lambda x}$, on obtient :

$$\lambda^2+a.\lambda+b.=0. \qquad [31]$$

Cette équation caractéristique est un trinôme du second degré dont les racines seront notées λ_1 et λ_2.

Dans ce cas, il est possible de déterminer A et B tels que :
F(x) = A. $e^{\lambda_1 x}$ + B. $e^{\lambda_2 x}$ [32]
en utilisant les conditions aux bornes. F est donc une combinaison linéaire de deux solutions particulières de l'équation différentielle.

Si l'on suppose désormais que l'équation aux dérivées partielles a des solutions de la forme V^{β} alors l'équation caractéristique devient :

$$\frac{1}{2}.\sigma^2V^2.\beta.(\beta-1).V^{\beta-2}+(r-\delta).V.\beta.V^{\beta-1} \text{ - r. } V^{\beta} = 0. \qquad [33]$$

Soit, en divisant tous les termes par V^{β} :

$$\frac{1}{2}.\sigma^2\beta.(\beta-1)+(r-\delta).\beta \text{ - r = 0.}$$
Finalement :

$$\frac{1}{2}.\sigma^2\beta^2+(r-\delta-\frac{1}{2}.\sigma^2).\beta \text{ - r = 0} \qquad [34]$$

Le discriminant Δ de l'équation est :

$$\Delta = (r - \delta - \frac{1}{2}.\sigma^2)^2 + 2.r.\sigma^2 \qquad [35]$$

En notant β_1 et β_2 les solutions de l'équation caractéristique :

$$\beta_1 = \frac{-\left(r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \sqrt{\Delta}}{\sigma^2} \qquad [36]$$

qui sera supposée être la solution la plus grande.

$$\beta_2 = \frac{-\left(r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2\right) - \sqrt{\Delta}}{\sigma^2}$$ qui sera supposée être la solution la plus petite.

Le produit des solutions d'un trinôme du second degré du type $ax^2 + bx + c = 0$ est égal à $\frac{c}{a}$.

Donc $\beta_1 . \beta_2 = \frac{-r}{\frac{1}{2}.\sigma^2} < 0$ donc $\beta_1 > 0$ et $\beta_2 < 0$.

Il est par ailleurs possible de démontrer que $\beta_1 > 1$.

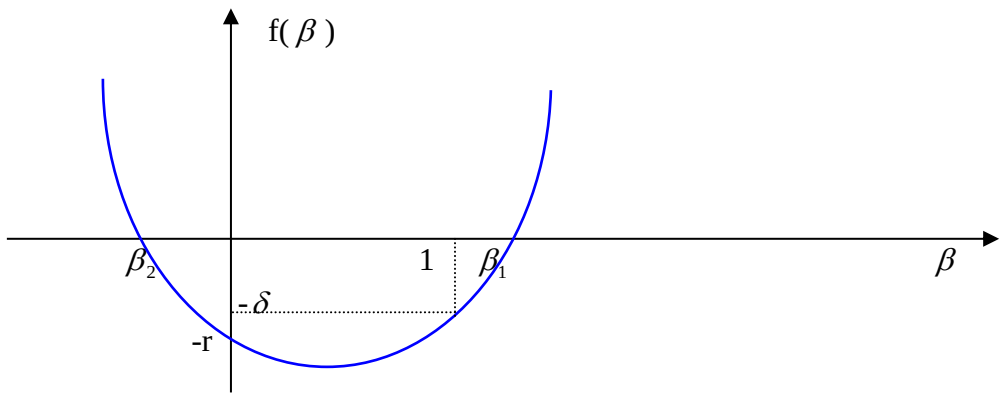
En effet, la fonction polynômiale du second degré f(β) = $\frac{1}{2}.\sigma^2\beta^2 + (r - \delta - \frac{1}{2}.\sigma^2).\beta$ - r est représentée graphiquement par une parabole telle que :

lim f(β) = $+\infty$ quand β tend vers $\pm\infty$, donc la parabole est tournée vers le haut.

f(0) = -r et f(1) = - δ < 0, δ étant supposé positif.

Dans ce cas, la représentation graphique de la parabole est la suivante :

Graphique n°2 : graphe de la fonction f(β)



Le graphique montre que pour que f(1) soit négatif, il convient que $\beta_1 > 1$.

Par ailleurs, les conditions aux bornes permettent de résoudre l'équation différentielle dont la solution générale est de la forme :

$$F = A.\ V^{\beta_1} + B.\ V^{\beta_2} \qquad [37]$$

Or, par hypothèse F(0) = 0, $\beta_1 > 0$ et $\beta_2 < 0$. Il convient donc que B = 0

Par conséquent : $F = A.\ V^{\beta_1}$.
Par ailleurs, F(V*) = V* - I (condition *value matching*) et F'(V*) = 1 (condition *smooth pasting*) ; donc :

$A.\ V^{*\beta_1} = V^* - I$
et
$A.\ \beta_1 . V^{*\beta_1 - 1} = 1.$

En divisant ces 2 égalités membre à membre, on obtient :

$$\frac{V^*}{\beta_1} = V^* - I \text{ soit } V^*\left(\frac{1}{\beta_1} - 1\right) = -I \text{ ou encore : } V^*\left(\frac{\beta_1 - 1}{\beta_1}\right) = I$$

Finalement :

$$V^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}.I \qquad [38]$$

Et :

$$A = \frac{V^* - I}{V^{*\beta_1}} = \frac{1}{\beta_1}\left(\frac{\beta_1 - 1}{\beta_1 I}\right)^{\beta_1 - 1} \qquad [39]$$

En outre, comme $\beta_1 > 1$, $\frac{\beta_1}{1 - \beta_1} > 1$

Dixit et Pindyck (1994)[19] retiennent les hypothèses numériques suivantes :

r = 4% ;
c = 4% ;
σ = 20% ;
I = 1

[19] Op cit

Dans ce cas, β_1 = 2, V* = 2I et A = $\frac{1}{4}$

En conclusion, si l'investissement peut être reporté indéfiniment, comme V*=2I, il convient de le réaliser lorsque la somme des flux de trésorerie futurs actualisés est au moins égale à deux fois l'investissement l'initial (contre seulement 1 fois en vertu du critère de la VAN qui est utilisé en l'absence d'option de report perpétuelle).

Dixit et Pindyck (1994) proposent plusieurs prolongements à cette analyse. Le premier prolongement consiste à considérer que la variable d'état qui définit un mouvement brownien géométrique est le prix du produit fabriqué par l'entreprise, plutôt que le flux de trésorerie généré par le projet d'investissement étudié. En outre, à ce stade, le coût de production est supposé nul ce qui, en l'absence de fiscalité, revient à désigner par P le profit généré par la vente du produit. Dès lors, en notant P le profit généré par le produit, il est possible d'écrire :

$$dP = \alpha P.dt + \sigma.P.dz \qquad [40]$$

où α représente le taux de croissance du profit. Ainsi, en désignant par μ le taux d'actualisation du profit – obtenu à partir du MEDAF - et par V la valeur du projet qui consiste à fabriquer le produit commercialisé au prix P :

$$V = \frac{P}{\mu - \alpha} \qquad [41]$$

sous réserve que μ soit supérieur à α . Soit alors : $\delta = \mu - \alpha$. Dans ce cas :

V = $\frac{P}{\delta}$ où δ représente le "*convenience yield*" du projet, c'est-à-dire l'avantage représenté par le détention du produit, dans l'hypothèse où l'entreprise dispose de la faculté de le stocker. L'équation aux dérivées partielles s'écrit alors :

$$\frac{1}{2}.\sigma^2 P^2.F''(P) + (r - \delta).P.F'(P) - r.F(P) = 0 \qquad [42]$$

dont les conditions limites sont :
F(0) = 0
F(P*)=V(P*)-I
F'(P*)=V'(P*)
où P* est le niveau de prix de produit pour lequel il est indifférent à l'entreprise d'investir ou d'attendre. Dixit et Pindyck (1994) établissent que :

$$P^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}.\delta I \qquad [43]$$

Par conséquent : V*= $\frac{P^*}{\delta} = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}.I$ ce qui confirme le résultat de la formule [38].

Le second prolongement consiste à déterminer la valeur critique du projet (pour laquelle il est indifférent à l'entreprise d'investir immédiatement ou d'attendre) dans l'hypothèse où les coûts de production ne sont pas nuls. Dixit et Pindyck (1994) notent π le profit instantané généré par le projet d'investissement dont le prix du produit fabriqué est toujours noté P et

dont le coût de production est désormais noté C. Dans la mesure où l'entreprise utilise sa capacité de production seulement si P est supérieur à C, il est possible d'écrire :
π =max(0,P-C).
Dans ce cas, la constitution d'un portefeuille d'arbitrage conduit à l'équation différentielle ci-après :

$$\frac{1}{2}.\sigma^2 P^2.V''+(r-\delta).P.V' - r.V + \pi = 0 \qquad [44]$$

où V représente la valeur du projet, considéré comme un actif dérivé du prix du produit fabriqué.
La résolution de cette équation différentielle conduit à distinguer deux cas :

Le premier cas consiste à supposer que P est inférieur à C. Dans ce cas, π =0 et l'équation [44] se limite à :

$$\frac{1}{2}.\sigma^2 P^2.V''+(r-\delta).P.V' - r.V = 0 \qquad [45]$$

ce qui revient à la formule [28]. La solution de l'équation [44] est donc :

$$V= E_1.P^{\beta_1} + E_2.P^{\beta_2} \qquad [46]$$

où β_1 et β_2 sont les solutions, respectivement positive et négative, de l'équation caractéristique associée à la formule [45]. En d'autres termes, le projet a de la valeur même en l'absence de capacité à générer immédiatement du profit. La valeur du projet correspond donc à l'option d'utilisation de la capacité de production lorsque les conditions de marché du produit permettent à la société d'être bénéficiaire, c'est-à-dire lorsque le prix de vente du produit est supérieur à son coût de revient. V correspond par conséquent à la valeur de l'option de report de l'investissement.

Pour déterminer les valeurs de E_1. et E_2, il convient de noter que si P est très petit (P tend vers 0), alors V est équivalent à $E_2.P^{\beta_2}$. De plus, la probabilité que l'investissement devienne rentable, c'est-à-dire que P devienne plus grand que C est d'autant plus faible que P se rapproche de 0. Par conséquent, V tend vers 0 quand P tend vers 0. Aussi, pour que $E_2.P^{\beta_2}$ (où β_2 est, par hypothèse, négative) soit égal à 0, il convient que E_2 soit égal à 0. Par conséquent si P est inférieur à C, alors :

$$V = E_1.P^{\beta_1} \qquad [47]$$

Le second cas revient à supposer que P est supérieur à C. Dans ce cas, π = P-C et l'équation [44] devient alors :

$$\frac{1}{2}.\sigma^2 P^2.V''+(r-\delta).P.V' - r.V + P-C = 0 \qquad [48].$$

Dans la mesure où $\frac{P}{\delta} - \frac{C}{r}$ est une solution particulière de l'équation [48], sa solution générale s'écrit sous la forme :

$$V = B_1.P^{\beta_1} + B_2.P^{\beta_2} + \frac{P}{\delta} - \frac{C}{r} \qquad [49]$$

où β_1 et β_2 sont les solutions de l'équation caractéristique associée à la formule [45].

La formule [49] permet de souligner que, en l'absence de possibilité de report de l'investissement, la valeur du projet se limite à V = $\frac{P}{\delta} - \frac{C}{r}$ c'est-à-dire à la différence entre d'une part une somme de produits futurs actualisés au coût des capitaux propres, d'autre part une rente perpétuelle de charges d'exploitation actualisées au taux sans risque. En d'autres termes, on retrouve ici le principe classique qui sous-tend la VAN selon lequel, en l'absence d'option de report de l'investissement, la valeur d'un projet correspond à ses flux de trésorerie futurs actualisés.

En outre, Dixit et Pindyck (1994) soulignent que si P tend vers l'infini, alors l'option d'attente n'a plus d'intérêt ; sa valeur tend alors vers 0. Dans ce cas, il convient alors que $B_1.P^{\beta_1} + B_2.P^{\beta_2} =$ 0. Or, si P tend vers l'infini, alors P^{β_2} tend alors aussi vers 0. Par conséquent, il convient alors que B_1 soit égal à 0. Finalement, si P est supérieur à C, alors :

$$V = B_2.P^{\beta_2} + \frac{P}{\delta} - \frac{C}{r} \qquad [50]$$

Les conditions aux bornes permettent alors de déterminer B_1 et E_2 en considérant la continuité du processus d'évolution du prix P. Ainsi, si P est égal à C, alors il est indifférent d'attendre ou d'investir et :

$$V = E_1.C^{\beta_1} = B_2.C^{\beta_2} + \frac{C}{\delta} - \frac{C}{r} \qquad [51]$$

Par ailleurs, dans la mesure où la courbe représentative de V doit avoir la même pente selon que P soit inférieur ou supérieur à C, ce qui revient à avoir la même dérivée au point P=C, il est possible d'écrire :

$$\beta_1.E_1.C^{\beta_1} = \beta_2.B_2.C^{\beta_2} + \frac{1}{\delta} - \frac{1}{r} \qquad [52]$$

La résolution du système composé des équations [51] et [52] conduit à :

$$E_1. = \frac{C^{1-\beta_1}}{\beta_1 - \beta_2}\left(\frac{\beta_2 - 1}{r} - \frac{\beta_2 - 1}{\delta}\right) \qquad [53]$$

et

$$B_2 = \frac{C^{1-\beta_2}}{\beta_1 - \beta_2}\left(\frac{\beta_1 - 1}{r} - \frac{\beta_1 - 1}{\delta}\right) \qquad [54]$$

En outre, l'option F d'investir s'écrit sous la forme :

F(P) = $A_1.P^{\beta_1} + A_2.P^{\beta_2}$ [55]

Dans la mesure où F(0)=0, il convient que A_2 =0. Par conséquent :

F(P) = $A_1.P^{\beta_1}$ [56]

Le niveau de prix de vente P* pour lequel il est indifférent d'investir ou d'attendre vérifie alors :

$$A_1.P^{*\beta_1} = B_2.P^{*\beta_2} + \frac{P^*}{\delta} - \frac{C}{r} - I \quad [57]$$

où I désigne le montant de l'investissement envisagé.
En considérant la dérivée de F au point critique P*, il vient :

$$\beta_1.A_1.P^{*\beta_1-1} = \beta_2.B_2.P^{*\beta_2-1} + \frac{1}{\delta} \quad [58]$$

En multipliant tous les termes de l'équation [58] par P^* et en multipliant ceux de l'équation [57] par β_1, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \beta_1 A_1 P^{*\beta_1} = \beta_2 B_2 P^{*\beta_2} + \dfrac{P^*}{\delta} \\ \beta_1 A_1 P^{*\beta_1} = \beta_1 B_2 P^{*\beta_1} + \dfrac{P^*\beta_1}{\delta} - \dfrac{C\beta_1}{r} - I\beta_1 \end{cases} \quad [59]$$

Dès lors, en retranchant la première équation de la seconde, on obtient une équation dont la seule inconnue est P*. Cette inconnue peut alors être obtenue, au cas par cas, par une procédure de calcul numérique :

$$B_2(\beta_1 - \beta_2)P^{*\beta_2} + (\beta_1 - 1)\frac{P^*}{\delta} - \beta_1(\frac{C}{r} - I) = 0 \quad [60]$$

Enfin, Dixit et Pindyck (1994) proposent de prendre en compte les coûts E d'arrêt d'un projet actif et les coûts I de redémarrage d'un projet inactif.

En notant P_H le prix du produit à partir duquel l'entreprise décide de redémarrer un projet inactif, à condition de dépenser la somme I et en notant P_L (supposé inférieur à P_H), le prix du même produit en deçà duquel l'entreprise décide d'arrêter l'exploitation du projet, sous réserve de dépenser la somme E, Dixit et Pindyck déterminent P_H et P_L par constitution d'un portefeuille d'arbitrage, application du lemme d'Ito et utilisation de conditions aux bornes aux points P_H et P_L . Ils aboutissent alors à plusieurs résultats essentiels. Ainsi, une augmentation de la volatilité du prix du produit, du coût I de redémarrage du projet ou du coût E d'arrêt de l'exploitation du projet implique une augmentation de P_H , une baisse de P_L et par conséquent un accroissement de l'intervalle [P_L , P_H]. Dans ce cas, soit l'entreprise continue à exploiter le projet alors que, si le projet était inactif, elle attendrait avant d'exercer son option de redémarrage, soit l'entreprise maintient le projet inactif, alors que, si ce dernier était actif, elle attendrait avant d'exercer son option d'arrêt. Dixit et Pindyck (1994), soulignent que la variation de l'amplitude de l'intervalle [P_L , P_H] est plus sensible à une variation de la

volatilité et du coût de redémarrage qu'à une variation du coût d'arrêt de l'exploitation du projet.