ISC Paris et Universités de Cergy Pontoise et de Nanterre

Master II Recherche GRFA

Les options réelles

Olivier Levyne
Olivier.levyne@calyon.com
Tél : 06 13 69 70 27

Options réelles

Introduction

La décision d'investissement issue de l'application du critère de la VAN, de même que l'évaluation de l'entreprise à l'aide de la méthode de l'actualisation des flux de trésorerie disponibles (*Discounted cash flows* ou DCF) supposent que les flux de trésorerie prévisionnels sont déterministes. En réalité, un certain nombre de facteurs d'incertitude conduisent l'entreprise à dégager des flux de trésorerie différents de ceux qui avaient été estimés au moment de l'établissement de prévisions.

En effet, l'intensification de la concurrence sur un marché peut rendre inéluctable une baisse des prix afin de rester compétitif ; inversement, les coûts de production et notamment le prix des matières premières (pétrole, gaz…) qui entrent dans le processus industriel peut augmenter plus fortement que prévu. Dans ce cas, l'entreprise peut souhaiter se réserver la possibilité de faire tourner son appareil de production uniquement si les conditions de marché rendent son exploitation profitable. En outre, il est parfois avantageux de réaliser un investissement en le fractionnant selon plusieurs séquences. Si une telle décision est prise au détriment de la réalisation d'économies d'échelle, elle permet de renoncer à certaines phases de l'investissement lorsque les conditions économiques se révèlent moins bonnes que prévu. De plus, le pilotage de la société peut conduire sa direction à des inflexions stratégiques. Ainsi, une activité non rentable, dont le plan d'affaires intégrait initialement des flux de trésorerie positifs, peut être abandonnée.

En somme, la prise de décision se doit d'intégrer la flexibilité opérationnelle dont disposent les sociétés dans un contexte d'incertitude. Le risque systématique est certes pris en compte au travers du taux d'actualisation dans les approches classiques de la VAN et de la méthode DCF. Toutefois, ces approches n'intègrent pas le risque total de variation des flux de trésorerie mesuré au travers de leur volatilité.

L'approche par les options réelles est en revanche centrée sur la notion d'incertitude. Ainsi, la valeur d'un projet correspond à la somme de ses flux de trésorerie futurs actualisés augmentée de la valeur de l'option d'investir au moment le plus favorable, c'est-à-dire lorsqu'une variable d'état - telle que le prix du produit ou le coût d'une matière première - atteint une valeur critique qu'il est possible de déterminer. De facto, la capitalisation boursière intègre alors la valeur des options de croissance dont dispose la société.

L'option d'investir au moment opportun, l'option de croissance, l'option de réaliser un investissement en plusieurs séquences, l'option d'abandon et l'option d'échange sont largement abordées par la littérature financière. Le point commun de ces différentes catégories d'options réelles est de considérer qu'une variable d'état ne peut être considérée comme déterministe. En effet, soit celle-ci définit un mouvement brownien géométrique, de même que le rendement de l'action sous-jacente à une option financière dans le cadre de la formule de Black and Scholes (1973) ou de Merton (1973), soit elle fait l'objet de sauts discrets qui peuvent être décrits par un processus de Poisson.

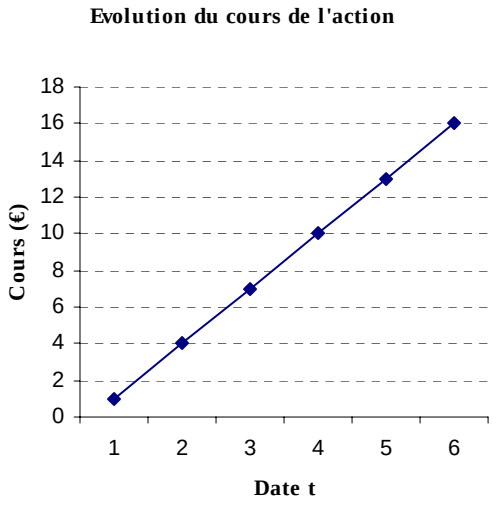
Dans ce contexte, ce cours comporte 4 parties : une première est consacrée au calcul différentiel stochastique. Présenté dans le cadre de la modélisation de l'évolution du cours des actions, il permet d'établir l'équation aux dérivées partielles qui sous-tend la formule de Black and Scholes abordée dans la deuxième partie. La troisième partie traite de la flexibilité opérationnelle mesurée au travers des options réelles. Après une présentation des options réelles par analogie avec les options financières, différents cas pratiques du domaine énergétique sont étudiés. Enfin, une quatrième partie aborde la théorie des options réelles stratégiques. Elle est centrée sur le modèle de Dixit et Pindyck (1994) qui est déduit de l'équation aux dérivées partielles et débouche sur des prolongements théoriques et empiriques.

Première partie : Calcul différentiel stochastique

La modélisation du cours des actions utilisée notamment dans le cadre de la détermination des formules de valorisation des options en temps continu repose sur l'utilisation du calcul différentiel stochastique. Avant d'entrer dans le détail de la modélisation, quelques notations et principes de base doivent être précisés sur des exemples simples :

Exemple 1 : Soit x_t le cours d'une action à la date t et x_0 son cours aujourd'hui. On suppose que le cours progresse de 3€ par unité de temps et que x_0 =1€. Ainsi :
$x_t=x_{t-1}+3$, soit : $x_t-x_{t-1}=3$ que l'on peut encore noter : $\Delta x = 3.\ \Delta t$ où Δt est 1 unité de temps au terme de laquelle le cours a progressé de 3 €.

t	0	1	2	3	4	5
x_t	1	4	7	10	13	16



Exemple 2 : Soit x_t le cours d'une action à la date t et x_0 son cours aujourd'hui. On suppose désormais que le cours progresse de 18€ par unité de temps égale à 1 année et que x_0 =1 000€. Ainsi :
$x_t=x_{t-1}+18$, soit : $x_t-x_{t-1}=18$ que l'on peut encore noter : $\Delta x = 18.\ \Delta t$ où Δt est 1 unité de temps au terme de laquelle le cours a progressé de 18 €.
Si l'unité de temps est raccourcie et égale à 1 mois, la variation du cours de cette nouvelle période de référence est égale à $\frac{18}{12}$=1,5€. Ainsi, on note : dx=1,5.dt

1. Définitions

1.1. Processus stochastique

Une variable (par exemple le cours de bourse) suit un processus stochastique lorsque les changements de valeur de cette variable, au cours du temps, sont au moins en partie aléatoires.

1.2. Processus stationnaire

Un processus est stationnaire lorsque sa distribution de probabilité est stable pour toute translation dans le temps

1.3. Trajectoire

La trajectoire est l'ensemble des réalisations de la variable pendant un intervalle de temps. La courbe de l'exemple 1 ci-dessus est la trajectoire du cours de bourse sur entre la date t=0 et la date t=5.

1.4. Processus de Markov

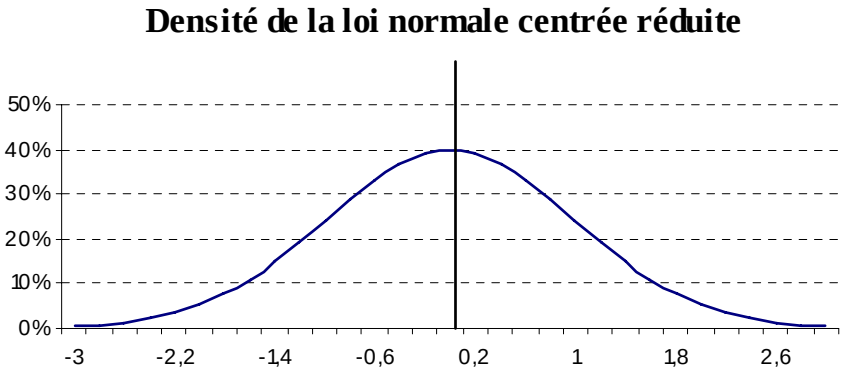
Une variable suit un processus de Markov lorsque ses valeurs futures dépendent exclusivement de sa valeur actuelle. Lorsque la variable et le processus sont continus, on parle de processus de diffusion.

2. Mouvement brownien simple

2.1. Définition

Soit Δx la variation du cours de l'action sur un petit intervalle de temps noté Δt.
On suppose que $\Delta x = \Delta z$ [1]
avec $\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$ [2]
et ε suit une loi normale centrée réduite ce qui est noté classiquement : $\varepsilon \rightarrow$ N(0,1).

La symétrie de la courbe de la loi normale centrée réduite ci-contre (représentative de la densité de probabilité d'ε) montre que l'aire sous la courbe à gauche de l'axe des ordonnées est égale à l'aire sous la courbe à droite de l'axe des ordonnées. Ainsi :
P[ε>0]=P[ε<0].
En d'autres termes, à la fin de chaque petit intervalle de temps dt, ε a autant de chance de prendre une valeur positive que de prendre une valeur négative.



2.2. Propriétés

Il est alors possible de caractériser Δz à l'aide de son espérance et de son écart type :

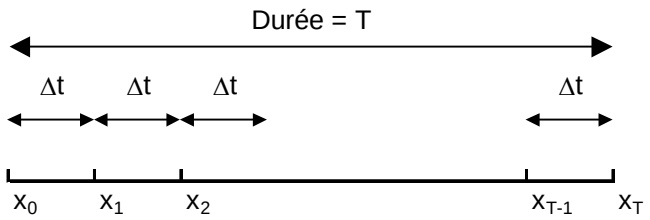
$E(\Delta z) = E(\varepsilon\sqrt{\Delta t}) = \sqrt{\Delta t}\, E(\varepsilon) = \sqrt{\Delta t}\ .\ 0 = 0$

$V(\Delta z) = V(\varepsilon\sqrt{\Delta t}) = \Delta t\, .V(\varepsilon) = \Delta t\, .1 = \Delta t$ donc $\sigma_{\Delta z} = \sqrt{\Delta t}$

Finalement : $\Delta x = \Delta z \rightarrow N(0, \sqrt{\Delta t})$.

2.3. Validité des propriétés pour un grand intervalle de temps

La propriété qui vient d'être établie reste valable pour un grand intervalle de temps noté T correspondant à n petits intervalles Δt . En d'autres termes :
T = n. Δt . [3]



Dans ce contexte, il convient de remplacer Δx par x(T) – x(0). Or :

$$x(T) - x(0) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta z_i = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \sqrt{\Delta t}$$

En effet :

$$\begin{aligned} x(T) - x(0) = \; & \cancel{x(1)} - x(0) & = \; & \varepsilon_1 \sqrt{\Delta t} \\ & + \cancel{x(2)} - \cancel{x(1)} & = \; & \varepsilon_2 \sqrt{\Delta t} \\ & + \ldots & & \\ & + x(T) - \cancel{x(T-1)} & = \; & \varepsilon_n \sqrt{\Delta t} \end{aligned}$$

Donc : $x(T) - x(0) = \varepsilon_1 \sqrt{\Delta t} + \varepsilon_2 \sqrt{\Delta t} + \ldots + \varepsilon_n \sqrt{\Delta t} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \sqrt{\Delta t}$

Comme dans l'hypothèse d'une évolution du cours sur un petit intervalle de temps, il est possible de caractériser x(T) – x(0) à l'aide de son espérance et de son écart type :

$$E[x(T) - x(0)] = E\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \sqrt{\Delta t}\right) = \sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^{n} E(\varepsilon_i) = \sqrt{\Delta t}\,.0 = 0$$

$$V[x(T) - x(0)] = V\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \sqrt{\Delta t}\right) = \Delta t\,.\sum_{i=1}^{n} V(\varepsilon_i) = \Delta t \sum_{i=1}^{n} 1 = n.\ \Delta t = T$$

On retrouve alors, pour un grand intervalle de temps T : $x(T) - x(0) \rightarrow N(0, \sqrt{T})$.
Il est également possible d'écrire que $x(T) \rightarrow N[x(0), \sqrt{T}]$. [4]

Si Δt tend vers 0 - ce qui revient à considérer une subdivision du temps T en intervalles extrêmement petits - le cours de l'action subit sur la période T un nombre infiniment grand de variations. En d'autres termes, le processus d'évolution du cours de l'action est continu, ce qui conduit à remplacer Δt par dt, Δx par dx et Δz par dz.

Dans ce cas, $dx \rightarrow N(0, \sqrt{dt})$, ce qui définit un processus de Wiener

3. Mouvement brownien avec tendance ou processus de Wiener généralisé.

3.1. Définition

Dans ce cas, l'évolution du cours dépend non seulement d'un processus aléatoire, mais également d'un paramètre de tendance centrale, ou *drift* noté a ci-après.

En d'autres termes : dx = a.dt + b.dz [5]
avec $dz = \varepsilon\sqrt{dt}$ et $\varepsilon \rightarrow$ N(0,1).

3.2. Propriétés

Sur un petit intervalle de temps Δt, le processus, en temps discret s'écrit :

Δx = a. Δt + b. Δz. [6]

Dans ce cas :

E(Δx) = E(a. Δt + b. Δz) = a. Δt + b.E(Δz), dans la mesure où seule Δz a une composante aléatoire. Ainsi : E(Δx) = a. Δt + b.E($\varepsilon\sqrt{\Delta t}$) = a. Δt + b. $\sqrt{\Delta t}$ E(ε) = a. Δt + 0 = a Δt.

V(Δx) = V(a. Δt + b. Δz) = 0 + b^2.V(Δz) = b^2.V($\varepsilon\sqrt{\Delta t}$) = b^2 Δt V(ε) = b^2 Δt.

Finalement : $\Delta x \rightarrow$ N(a Δt ,b $\sqrt{\Delta t}$) [7]

En subdivisant une période T en n intervalles de temps Δt (soit T = n. Δt), la variation du cours devient sur cette période T :

x(T) – x(0) = $\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$.

Dès lors : E[x(T) – x(0)] = E($\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$) = $\sum_{i=1}^{n} E(\Delta x_i)$ = n.a Δt = a.T

Et V [x(T) – x(0)] = V($\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$) = $\sum_{i=1}^{n} V(\Delta x_i)$ = $\sum_{i=1}^{n} b\sqrt{\Delta t}$ = $b^2 \Delta t \sum_{i=1}^{n} 1$ = n. $b^2 \Delta t$ = $b^2 T$.

Finalement : x(T) – x(0) $\rightarrow$ N(aT,b $\sqrt{T}$) ou encore :
x(T) $\rightarrow$ N[x(0) + aT, b $\sqrt{T}$]. [8]

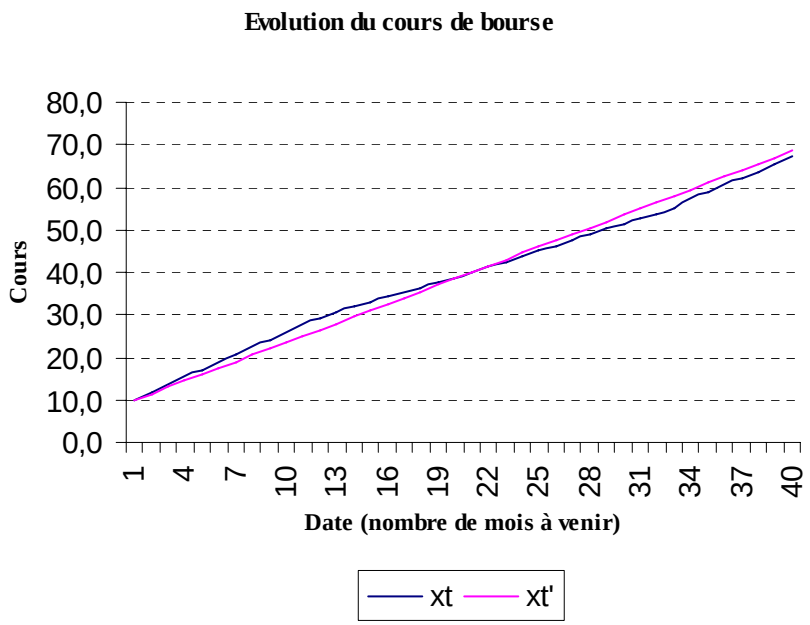
3.3. Exemple numérique

Exemple 3 : Soit une action dont le cours, actuellement de 1 000€, doit progresser en moyenne de 18€ par an. En outre, il affiche un écart type annuel de $\sqrt{3}$. On peut alors écrire, en notant Δx l'accroissement du cours à l'issue d'une année :

$$\Delta x = 18.\ \Delta t + \sqrt{3}.\ \Delta z.$$

Si la période de référence est ramenée de l'année au mois, la tendance, ou progression moyenne s'établit à $\frac{18}{12}$=1,5€.
Par ailleurs, il convient de déterminer l'écart type mensuel. Or, la variance annuelle est égale au carré de l'écart tyope annuel soit 3. Ainsi, la variance mensuelle ressort à $\frac{3}{12}$=0,25 donc l'écart type mensuel est de $\sqrt{0,25}$ = 0,5€. On peut alors écrire, en notant dx l'accroissement de valeur au cours d'une unité de temps égale à 1 mois :
dx =1,5.dt + 0,5.dz soit encore :
dx = 1,5.dt + 0,5. $\varepsilon . \sqrt{dt}$.
Dans la mesure où dt = 1, on a donc :
$x_t = x_{t-1} + 1,5 + 0,5.\ \varepsilon_t$.

En simulant des nombres aléatoires sur 40 mois, on obtient la trajectoire suivante de x_t et de x_t' où x_t' est la trajectoire du cours en l'absence d'aléa.



4. Processus d'Ito et mouvement brownien géométrique

Ce processus correspond à une variation de x en temps continu définie par :

dx = a(x,t).dt + b(x,t).dz [9]

a et b étant alors des fonctions des 2 variables x et t.

Il est possible de calculer l'espérance et la variance de dx :

E(dx) = a(x,t).dt car E(dz) = E($\varepsilon\sqrt{\Delta t}$) = $\sqrt{\Delta t}$ E(ε) = 0

V(dx) = $b^2(x,t).dt.V(\varepsilon)$ = $b^2(x,t).dt.1$= $b^2(x,t).dt$

Par conséquent : dx $\rightarrow$ N[a(x,t).dt, b(x,t) $\sqrt{dt}$] [10]
Avec :
a(x,t) = tendance instantanée
b(x,t) = variance instantanée.

Le mouvement brownien géométrique qui permet de définir l'évolution du rendement d'une action est un cas particulier de processus d'Ito en supposant que :

a(x,t) = μ .x
et b(x,t) = σ .x
Dès lors : dx = μ .x.dt + σ .x.dz. [11]

Grâce au lemme d'Ito, il est possible d'établir qu'un tel processus définit une loi log-normale.

5. Lemme d'Ito

5.1. Enoncé

Si une variable x suit un processus d'Ito [dx=a(x,t).dt+b(x,t).dz], alors une fonction de cette variable et du temps [F(x,t)] suit aussi un processus d'Ito.

5.2. Démonstration

Le lemme d'Ito est établi à partir de la formule de Taylor à 2 variables x et t :

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\Delta t^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial x.\partial t}\Delta x.\Delta t + \ldots \qquad [12]$$

Soit Δx = a(x,t). Δt + b(x,t). Δz = a(x,t). Δt + b(x,t). $\varepsilon.\sqrt{\Delta t}$ avec $\varepsilon \rightarrow N(0,1)$

Pour alléger les notations, il est noté, par la suite :

Δx = a. Δt + b $\varepsilon.\sqrt{\Delta t}$ [13]

Le lemme d'Ito conduit à ne considérer que les termes en Δx et Δt de degré égal à 1 ce qui conduit naturellement à éliminer (par troncature) tous les termes du développement de ΔF à partir du quatrième. En revanche, le troisième terme doit être conservé. En effet :

Δx^2 = (a. Δt + b $\varepsilon.\sqrt{\Delta t}$)^2 = $a^2\Delta t^2 + b^2\varepsilon^2.\Delta t + 2ab.\Delta t^{\frac{3}{2}} = b^2\varepsilon^2.\Delta t$ [14]
par troncature.

Or : E($b^2\varepsilon^2.\Delta t$)=$b^2.\Delta t$ .E(ε^2) et E(ε^2) = V(ε) + $[E(\varepsilon)]^2$ = 1 + 0 = 1
Donc : E($b^2\varepsilon^2.\Delta t$)=$b^2.\Delta t$.

Par ailleurs : V($b^2\varepsilon^2.\Delta t$)=$b^4.\Delta t^2.V(\varepsilon^2)$ qui tend vers 0 quand Δt tend vers 0.

Par conséquent : lim $b^2\varepsilon^2.\Delta t$ = $b^2.\Delta t$ quand Δt tend vers 0.

En considérant une subdivision du temps en intervalles *dt* extrêmement petits, donc en se plaçant en temps continu, l'application de la formule de Taylor devient :

$$dF(x,t) = \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}b^2.dt$$

$$= \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial x}.(a.dt + b.dz) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}b^2.dt$$

Par conséquent, en revenant aux notations originelles, à savoir :

- a = a(x,t) ;
- b = b(x,t),

on en déduit que :

$$dF(x,t) = [\frac{\partial F}{\partial t} + a(x,t)\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2}b^2(x,t)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}].\text{dt} + b(x,t).\frac{\partial F}{\partial x}dz \quad [15]$$

5.3. ***Application : log-normalité du cours de bourse***

Soit F(x,t) = ln(x) = F(x) [16]

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial F(x)}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x} = \frac{1}{x} \text{ et } \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

Dans ce cas, dF = $(0+\frac{a}{x}-\frac{1}{2}b^2\frac{1}{x^2})$ .dt + $b.\frac{1}{x}dz$

En revenant à l'hypothèse de mouvement brownien géométrique, ce qui revient à considérer que :

a = a(x,t) = μ .x
et b = b(x,t) = σ .x

on a : dF = $(0+\frac{\mu.x}{x}-\frac{1}{2}\frac{\sigma^2x^2}{x^2})$ .dt + $\sigma x.\frac{1}{x}dz$

soit finalement : dF = $(\mu-\frac{\sigma^2}{2})dt+\sigma.dz$ [17]

dlnx = lnx – $\ln x_0$ = $(\mu-\frac{\sigma^2}{2})dt+\sigma.dz$

Donc : lnx = $\ln x_0$ + $(\mu-\frac{\sigma_2}{2})dt+\sigma.dz$

D'où : x = $x_0.e^{(\mu-\frac{\sigma_2}{2})dt+\sigma.dz}$

Par aileurs : dF définit alors un mouvement brownien avec drift. Par conséquent :

dF $\rightarrow N[(\mu-\frac{\sigma^2}{2})dt,\sigma\sqrt{dt}]$ ou dlnx $\rightarrow N[(\mu-\frac{\sigma^2}{2})dt,\sigma\sqrt{dt}]$. [18]

Ainsi, dx suit donc une loi normale. Ceci revient à dire que dx suit une loi log-normale de paramètres $(\mu-\frac{\sigma^2}{2})dt$ et $\sigma\sqrt{dt}$.

6. Propriétés du TIR d'une action

6.1. Expression du TIR en temps continu

On suppose que l'action dont le cours est égal à S_0 à la date t=0 et qui ne verse pas de dividendes vaut S_T à la date t=T. Soit *r* son TIR en temps discret. Ainsi :

$S_0 = \frac{S_T}{(1+r)^T}$, soit encore : $S_T = S_0.(1+r)^T$.

Soit i le taux continu équivalent au taux r. Dans la mesure où $(1+r)=e^i$, on a alors :
$S_T = S_0.e^{iT}$ dont il est possible de déduire la valeur de i qui représente donc le TIR (par principe annualisé) en temps continu :

$iT = \ln\frac{S_T}{S_0}$, soit encore : $i=\frac{1}{T}\ln\frac{S_T}{S_0}$ et finalement :

$i = \frac{1}{T}(\ln S_T - \ln S_0)$ [19]

6.2. Loi du TIR en temps continu

On sait que si dx définit un mouvement brownien géométrique, alors :
dx = μ .x.dt + σ .x.dz, soit encore :

$\frac{dx}{x}$ = μ . dt + σ . dz où dz est mouvement brownien simple

Dans ce cas, dlnx suit une loi normale N$\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt; \sigma\sqrt{dt}\right]$

En remplaçant x par S, l'expression du mouvement brownien géométrique devient :

$\frac{dS}{S}$ = μ . dt + σ . dz et dlnS suit une loi normale N$\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt; \sigma\sqrt{dt}\right]$.

En remplaçant dt par T (durée entre la date t=0 et t=T), on a alors :

dlnS = $\ln S_T - \ln S_0$ qui suit une loi normale N$\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T; \sigma\sqrt{T}\right]$.

Or, le TIR continu, noté i = $\frac{1}{T}\left(\ln S_T - \ln S_0\right)$

Dans ce cas,

E(i)= E[$\frac{1}{T}\left(\ln S_T - \ln S_0\right)$]= $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$

V(i)= V[$\frac{1}{T}\left(\ln S_T - \ln S_0\right)$]= $\frac{1}{T^2}V\left(\ln S_T - \ln S_0\right) = \frac{1}{T^2}.\sigma^2 T = \frac{\sigma^2}{T}$

Ainsi, i suit une loi normale N$\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right); \frac{\sigma}{\sqrt{T}}\right]$ [20]

6.3. Illustration numérique

Il ressort de la formule [20] que l'espérance du TIR ($\mu - \frac{\sigma^2}{2}$**)** est inférieure au rendement moyen de l'action (μ**).**

Soit en effet une action dont le cours est S=100€ à la date t=0. Supposons que cette action vaut 200 à la date t=1 et à la date t=2.

Dans ce cas, son rendement est de 100% sur la première période (entre t=0 et t=1) et 0% sur la seconde période (entre t=1 et t=2). $\frac{100\% + 0\%}{2}$ %.

Par ailleurs, son TIR est égal à i tel que : $100(1+i)^2=200$, soit :

I= $\sqrt{\frac{200}{100}} - 1$ = 45% qui est bien inférieur à 50%.

En revanche, si le cours de l'action égal à 100€ en t=0 et 200€ en t=1 avait atteint 400€ en t=2, alors son rendement moyen aurait été de 100% et son TIR i aurait vérifié :

$100(1+i)^2=400$, soit :

I= $\sqrt{\frac{400}{100}} - 1$ = 100% qui est égal au taux de rendement moyen. Ceci s'explique par l'absence de volatilité des rendements qui sont égaux à 100% à la fois à la date t=1 et à la date t=2.

Seconde partie : évaluation des options financières

1. Equation aux dérivées partielles

La valorisation des options par la formule de Black and Scholes (1973) suppose que le cours S de l'action sous-jacente définit un mouvement brownien géométrique qui est un cas particulier de processus d'Ito.

Ainsi : dS = $\mu Sdt + \sigma Sdz$ [1]
où μ désigne le rendement espéré de l'action (déterminé à partir du MEDAF) et σ sa volatilité. Par ailleurs :
dz = $\varepsilon\sqrt{dt}$ [2]
où ε suit une loi normale centrée réduite.

Or, le lemme d'Ito permet d'obtenir une expression d'une fonction de 2 variables :

- l'une, *x*, qui définit un processus d'Ito. En d'autres termes :
  dx = a(x,t).dt + b(x,t).dz [3]

- l'autre, *t*, qui représente le temps que l'on suppose divisible en une infinité de petites périodes dt :

$$dF(x,t) = [\frac{\partial F}{\partial t} + a(x,t)\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2}b^2(x,t)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}].\text{dt} + b(x,t).\frac{\partial F}{\partial x}.dz \quad [4]$$

En outre, la prime d'un *call* (à ce stade européen) est une fonction :

- du cours de l'actif sous-jacent (sa variation impacte directement la valeur intrinsèque de l'option) dont on suppose qu'il définit un mouvement brownien géométrique ;

- de la durée restant jusqu'à l'échéance de l'option : le passage du temps réduit la valeur temps de l'option.

Ainsi, en notant C(S,t) la prime du *call*, il convient de remplacer, dans la formule du lemme d'Ito :

- a(x,t) par μS ;
- b(x,t) par σS .

Dans ce cas, la formule du lemme d'Ito devient :

$$dC(S,t) = [\frac{\partial C}{\partial t} + \mu S.\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}.\sigma^2 S^2.\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}].\text{dt} + \sigma S.\frac{\partial C}{\partial S}.dz \quad [5]$$

La formule de Black and Scholes est issue de la constitution d'un portefeuille d'arbitrage, c'est-à-dire non risqué. Or, dans l'expression de d(S,t), seul le dernier terme, $\sigma S.\frac{\partial C}{\partial S}.dz$ a une composante aléatoire (dz est en effet égal à $\varepsilon\sqrt{dt}$ où ε suit une loi normale centrée réduite).

Par conséquent, en supposant que les réalisations de dz sont les mêmes pour l'option et pour l'action sous-jacente, le portefeuille sera sans risque si les termes en dz se compensent à savoir :

- $\sigma S.\frac{\partial C}{\partial S}.dz$, issu de la formule de la variation de la prime de l'option ;
- $\sigma S.dz$. issu de la formule de la variation du cours de l'action sous-jacente.

Il convient alors de composer le portefeuille de :

- 1 option vendue ;
- $\frac{\partial C}{\partial S}$ actions achetées.

Soit P la valeur du portefeuille ainsi constitué :

$$P = -C + \frac{\partial C}{\partial S}.S. \qquad [6]$$

Dès lors :

$$dP = -dC + \frac{\partial C}{\partial S}.dS = -[\frac{\partial C}{\partial t} + \mu S.\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}.\sigma^2 S^2.\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}].dt - \sigma S.\frac{\partial C}{\partial S}.dz + \frac{\partial C}{\partial S}[\mu S.dt + \sigma S.dz]$$

En simplifiant par $\mu S.\frac{\partial C}{\partial S}dt$ et par $\sigma S.\frac{\partial C}{\partial S}.dz$,on obtient :

$$dP = [-\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{1}{2}.\sigma^2 S^2.\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}].dt.$$

Or ce portefeuille est, par hypothèse, non risqué. Il rapporte donc le taux sans risque *r*, homogène avec l'intervalle de temps *dt*. Il est alors possible d'écrire :

$$[-\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{1}{2}.\sigma^2 S^2.\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}].dt = [-C + \frac{\partial C}{\partial S}.S]r.dt \qquad [7]$$

Dès lors, en simplifiant par dt :

$$[-\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{1}{2}.\sigma^2 S^2.\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}] = [-C + \frac{\partial C}{\partial S}.S].r$$

Finalement :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS.\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}.\sigma^2 S^2.\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = rC \qquad [8]$$

Cette équation [8] aux dérivées partielles (*Fundamental Partial Differential Equation of Contingent Claims*), dont la résolution fournit la formule de Black and Scholes, ne contient pas le paramètre μ. Elle est donc indépendante de l'espérance de rendement de l'investisseur, qui elle-même est fonction de son degré d'aversion au risque. Dans ce contexte, la formule de Black and Scholes se situe en univers risque-neutre.

2. Formule de Black and Scholes

2.1. Formule de base

La résolution de l'équation aux dérivées partielles est conditionnée par les hypothèses suivantes :

- à l'échéance, le *call* vaut max(0,S_T-E) où S_T est le cours du sous-jacent à l'échéance. Par conséquent sa valeur actuelle est e^{-rT}. ;
- S_T suit une loi log-normale de paramètres (r-$\frac{\sigma^2}{2}$)T et $\sigma\sqrt{T}$ en univers risque neutre.

La résolution de l'équation aux dérivées partielles conduit à :

$$C = S\Phi(d_1) - Ee^{-r'\tau}\Phi(d_2) \qquad [9]$$

avec : $$d_1 = \frac{\ln\frac{S}{E} + (r' + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \qquad [10]$$

et $$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau} \qquad [11]$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \qquad [12]$$

τ est la durée jusqu'à l'échéance de l'option exprimée en années.
r' est le taux sans risque (OAT) continu : si le taux discret est noté r, alors r' = ln(1+r).
σ est la volatilité de l'action sous-jacente. Elle peut être déterminée selon 2 modalités :

- Volatilité historique : dans ce cas, la volatilité correspond à l'écart type du rendement de l'action. Soit S_t le cours de l'action à la date t, rt son rendement en temps discret et r't son rendement en temps continu..

  Il a été établi, au chapitre 2, que : $r'_t = \ln\frac{S_t}{S_{t-1}}$. [13]

  Par conséquent :

  $$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(r'_t - \bar{r}')^2} \qquad [14]$$

  avec $$\bar{r}' = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} r'_t \qquad [15]$$

- Volatilité implicite : dans ce cas, la prime est supposée connue. La volatilité est alors la seule inconnue de la formule de Black and Scholes.

  La prime C du *call* est une fonction de 5 paramètres, avant prise en compte des dividendes futurs : S, E, r, τ , σ . En d'autres termes, il existe une fonction F telle que :

  C = F(S, E, r, τ ,σ).

  Dès lors, si la valeur de C est connue, il est possible d'écrire :

  σ = F^{-1}(S, E, r, τ ,C).

A noter que la formule peut également être obtenue en utilisant le principe selon lequel la valeur du call est la valeur actualisé de l'espérance de valeur intrinsèque à l'échéance. En d'autres termes : C=. e^{-rT} E[max(0,S_T-E)]

Exemple :

Valorisation par la formule de Black and Scholes du *call* de prix d'exercice 65€ sur Aventis, échéance 12/02/2003. On suppose en outre que :
- la volatilité de l'action Aventis est de 58% ;
- le taux sans risque est de 4,684%.

S = 58,8€
E = 65€
r = 4,684% $\Rightarrow$ r' = taux continu = ln(1+4,684%) = 4,58%
σ = 58%
$\tau = \frac{80}{365}$

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{58,8}{65})+(0,0458+\frac{0,58^2}{2})(\frac{80}{365})}{0,58\sqrt{\frac{80}{365}}} = -0,20$$

$$d_2 = -0,20 - 0,58\sqrt{\frac{80}{365}} = -0,47$$

$\Phi(-0,20) = 1 - \Phi(0,20) = 1 - 0,5793 = 0,4207$
$\Phi(-0,47) = 1 - \Phi(0,47) = 1 - 0,6808 = 0,3192$

$$C = 58,8\times 0,4207 - 65\times e^{-0,0458\times(\frac{80}{365})}\times 0,3192 = 4,2€$$

2.2. Prise en compte des dividendes

F. Black (1975)[1] propose une méthode de valorisation de l'option qui prend en compte la baisse du cours de l'action sous-jacente lors du versement du dividende.

[1] Black F., "Fact and Fantasy in the Use of Options", *Financial Analysts Journal*, juillet-août 1975

Dans la mesure où le propriétaire d'un *call* n'a pas droit aux dividendes tant que l'option n'est pas exercée, il convient, si le sous-jacent verse un dividende avant la date d'échéance de l'option, de remplacer - dans la formule de Black and Scholes - S par

$$S' = S - De^{-r'\tau'} \qquad [16]$$

avec $r' = \ln(1+r)$ [17]
où r désigne le taux des OAT.

et τ' qui correspond à la durée restant jusqu'à la date de versement du dividende exprimé en années. En d'autres termes :

$$\tau' = \frac{Dd - Dv}{365} \qquad [18]$$

avec :

Dd = date de détachement du dividende
Dv = date de valorisation de l'option.

Hsia (1981)[2] a établi la convergence de la formule de Black and Scholes vers la première proposition de Modigliani et Miller (1958), ce qui souligne la forte imbrication de l'ensemble de la théorie financière. La présentation détaillée de cette convergence est fournie en annexe.

2. 3. Formule de Merton

R. Merton (1973) propose une variante qui prend s'appuie sur une hypothèse de versement de dividende en continu au taux q où q est un taux annualisé. En d'autres termes, si a est le taux de rendement discret observé, alors q=ln(1+a). A titre d'exemple, une action dont le cours est de 100 € et qui verse une fois par an un dividende de 5 € à un rendement discret de 5%. Son taux de dividende continu est alors de 4,88%.

Dans ce cas, le versement du dividende réduit le taux de croissance du cours de l'action.

Ainsi, si le cours de l'action passe - entre la date $t = 0$ et $t = T$ - de S à S_T, en présence de distribution de dividendes, celui-ci aurait été porté de S à $S_T.e^{q\tau}$ en l'absence de distribution.

Par conséquent, en l'absence de distribution, le cours S_T aurait été obtenu en $t = T$ si le cours de l'action en $t=0$ avait été égal $S.e^{-q\tau}$.

Il convient alors de revenir à la formule initiale de Black and Scholes – qui n'intègre pas l'effet de la distribution de dividendes - et de remplacer S par $S.e^{-qt}$.

Dans ce cas :

$$C = S.e^{-q\tau}.\Phi(d_1) - E.e^{-r'\tau}\Phi(d_2) \qquad [19]$$

avec :

[2] Hsia CC., "Coherence of the Modern Theories of Finance", *Financial Review*, Winter 1981

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S.e^{-q\tau}}{E} + (r' + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = \frac{\ln \frac{S}{E} + \ln e^{-q\tau} + (r' + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = \frac{\ln \frac{S}{E} - q\tau + (r' + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

Finalement :

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{E} (r' - q + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \qquad [20]$$

et $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$. [21]

Cette formule résulte, comme la formule de Black & Scholes, de la résolution (recherche de la valeur de C) d'une équation aux dérivées partielles qui intègre donc le versement continu de dividendes au taux q.

Dans l'hypothèse de constitution d'un portefeuille d'arbitrage qui a consisté à vendre 1 call et acheter $\frac{\partial C}{\partial S}$ actions, en l'absence de distribution de dividendes, le lemme d'Ito a permis d'obtenir la formule [7] :

$$[-\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{1}{2}.\sigma^2 S^2.\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}].dt = [-C + \frac{\partial C}{\partial S}.S]r.dt \qquad [7]$$

Si l'action verse un dividende au taux continu q, le propriétaire du portefeuille d'aribitrage, reçoit, en plus du membre de gauche de l'égalité [7], la somme qS.dt par action et par unité de temps dt, soit $\frac{\partial C}{\partial S}$qS.dt pour $\frac{\partial C}{\partial S}$ actions. Le portefeuille étant, par hypothèse, non risqué, il rapporte le taux sans risque r. Dès lors :

$$[-\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{1}{2}.\sigma^2 S^2.\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}].dt + qS\frac{\partial C}{\partial S}.dt = [-C + \frac{\partial C}{\partial S}.S]r.dt \qquad [22]$$

En simplifiant par dt, [22] devient :

$$[-\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{1}{2}.\sigma^2 S^2.\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}]. + qS\frac{\partial C}{\partial S}. = [-C + \frac{\partial C}{\partial S}.S]r.$$

En regroupant $\frac{\partial C}{\partial S}$.Sr.et qS$\frac{\partial C}{\partial S}$:

$$-\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{1}{2}.\sigma^2 S^2.\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}. + qS\frac{\partial C}{\partial S}. - \frac{\partial C}{\partial S}.Sr = -Cr.$$

$$-\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{1}{2}.\sigma^2 S^2.\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}. + (q-r)S\frac{\partial C}{\partial S}. = -Cr. \qquad [23]$$

En multipliant tous les termes par –1, [9] devient :

$$\boxed{\frac{\partial C}{\partial t} + (r - q)\frac{\partial C}{\partial S}S. + \frac{1}{2}.\sigma^2 S^2.\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = Cr.} \qquad [24]$$

La formule de Cox, Ross et Rubinstein (1977) [3] - qui suppose que l'évolution du cours de l'action sous-jacente à l'option définit un processus stochastique en temps discret - constitue une alternative à la formule de Black and Scholes (1973). Dans la mesure où la formule de Cox, Ross et Rubinstein (1977) n'est qu'exceptionnellement utilisée dans la littérature consacrée aux options réelles - utiles dans le cadre du processus d'investissement – cette formule est uniquement présentée, pour mémoire, en annexe. En outre, Cox, Ross et Rubinstein (1977) ont établi la convergence de leur formule vers celle de Black and Scholes (1973).

Troisième partie :. options réelles d'exploitation

3.1. Option de réalisation de la seconde phase d'un projet

Cette option permet de réaliser un projet d'investissement en deux temps. Dans un premier temps, l'entreprise investit une somme relativement réduite. Si, à l'issue de cette première période qui permet de tester le marché, un événement externe se réalise (déréglementation, réduction des coûts d'exploitation…), l'entreprise effectue un second investissement d'un montant plus significatif.

A titre illustratif, une entreprise envisage l'acquisition d'une première machine qui constitue le projet 1. Si à l'issue de la durée de vie économique et fiscale de la machine, le marché sur lequel la société opère est déréglementé, celle-ci réalisera un second investissement. Les caractéristiques des deux investissements sont synthétisées dans le tableau ci-après :

Tableau n°1 : Exemple de caractéristiques d'un investissement en deux phases

Hypothèses		
Caractéristiques du projet 1 (1ère phase d'investissement)		
Investissement	1 200	
CF annuel	130	
Durée de vie du projet	5	ans
Taux d'actualisation	8%	
Caractéristiques du projet 2 (2ème phase d'investissement)		
Investissement	15 000	
Valeur des CF futurs actualisés lors de l'investissement	10 000	
Horizon de la mise en œuvre du projet	5	ans
Volatilité des actions des sociétés du secteur	30%	
Taux sans risque	5%	

NB : CF (*cash flow*) = flux de trésorerie

La VAN du projet 1 est égale à –1 200 + 130. $\frac{1-(1+8\%)^{-5}}{8\%}$ = -681.

Le projet global pourra toutefois être entrepris si la valeur de l'option associée au projet 2 compense la VAN négative du projet 1. Son prix d'exercice est de 10 000.

[3] Cox J., Ross S., Rubinstein M., "Options Pricing : A Simplified Approach", *Journal of Financial Economics*, octobre 1979

En outre, l'actif sous-jacent (flux de trésorerie futurs générés par le projet) est évalué à 10 000 à la date de réalisation (éventuelle) de l'investissement. Par conséquent, sa valeur actualisée à la date d'évaluation de l'option est égale à $\frac{10000}{(1+8\%)^5}$ = 6 806.

La connaissance des autres paramètres (volatilité de 30%, durée restant jusqu'à l'échéance de 5 ans, taux sans risque de 5%) permet de valoriser cette option par la formule de Black and Scholes :

$$d_1 = \frac{\ln\frac{6806}{10000} + (0{,}05 + \frac{0{,}30^2}{2}).5}{0{,}30.\sqrt{5}} = -0{,}47$$

$d_2 = -0{,}47 + 0{,}30\sqrt{5} = -1{,}14$

Finalement :

C = 6 806.Φ(-0,47)–10 000.e-0,05x4 Φ(-1,14) = 689.

La VAN globale des projets 1 et 2 ressort alors à –681+689 = 8. Comme elle est positive, le premier projet peut être entrepris.

3.2. Exemple de valorisation d'une concession

Cette option permet de calculer la valeur d'un projet d'investissement qui donne lieu à l'exploitation d'une machine ou d'une concession pendant une période de temps fixé. L'investissement envisagé permet de commercialiser un produit dont la volatilité du prix de marché est connue.

En outre, l'entreprise pourra décider, périodiquement (par exemple chaque année), en fonction des conditions d'exploitation connues d'avance et de l'évolution du produit, de mettre la machine en exploitation ou d'exploiter la concession (par exemple en procédant à l'extraction d'une matière première si son prix de marché est supérieur à son coût de revient).

Cette flexibilité opérationnelle crée une valeur d'option dans la mesure où l'exploitation est mise en œuvre uniquement lorsque, sur la base du prix de marché à la date de la décision qui doit être prise, le prix de vente du produit est supérieur à son coût de revient. Dans le cas contraire, la production est arrêtée.

Le projet envisagé correspond par conséquent à un portefeuille de *n calls*, *n* étant le nombre de dates auxquelles l'entreprise prend une décision sur la poursuite ou l'arrêt de l'exploitation. Les caractéristiques de chaque call sont les suivantes :

- valeur de l'actif sous-jacent : prix de vente comptant du produit fabriqué ;
- prix d'exercice : coût de revient de la production ;
- date d'échéance : date de décision de poursuite ou d'arrêt de l'exploitation.

A titre illustratif, une entreprise envisage de répondre à un appel d'offre sur l'exploitation d'une concession pour une durée de 10 ans relative à un gisement de matière première dont le prix de marché est actuellement de 25 € par unité extraite pouvant être revendue. Son coût de revient unitaire est de 20 € et la volatilité de son prix de marché est estimée à 30%. La capacité de production annuelle est de 200 000 unités.

Le taux sans risque continu est de 5% et le taux de *convenience yield* continu, c'est à dire l'avantage à détenir un stock de la matière première qui peut être extraite, est de 0,06%. Ce taux correspond au taux de dividende (exprimé par le rapport entre le dividende versé et le cours de l'action sous-jacente) d'une option financière.

L'entreprise pourra, périodiquement, en fonction des conditions de marché de la matière première, décider d'exploiter la concession ou d'arrêter la production.

Les frais de mise en exploitation ou d'arrêt de l'exploitation sont supposés négligeables.

Hypothèse 1 : la décision est prise une fois par an. Dans ce cas, le projet correspond à un portefeuille de 10 options dont le prix d'exercice est de 20 € et le cours comptant de l'actif sous-jacent de 25 €. La première option doit être exercée immédiatement. Elle n'a donc pas de valeur temps. Sa prime est donc égale à sa valeur intrinsèque de 5 € par unité extraite, soit 1 M€ pour la totalité de la production de l'année.

Les 9 autres options sont évaluées par la formule de Black and Scholes (1973)

La valeur du projet, c'est-à-dire le prix maximum qui peut figurer dans la réponse à l'appel d'offres, est la somme des valeurs des 10 options. Le détail du calcul est fourni dans le tableau ci-après :

Tableau n°2 : exemple de valorisation d'une option d'arrêt temporaire dans l'hypothèse où l'option peut être exercée une fois par an dans le cadre d'un projet à 10 ans

Rang de l'option	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	TOTAL
Date de l'évaluation	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	01/01/2003	
Date d'échéance des options	01/01/2003	01/01/2004	01/01/2005	01/01/2006	01/01/2007	01/01/2008	01/01/2009	01/01/2010	01/01/2011	01/01/2012	
Cours comptant du sous-jacent (€)	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	
Prix d'exercice (€)	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	
Taux sans risque continu	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	5,00%	
Durée restant jusqu'à l'échéance (en années)	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	
Volatilité	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	
Convenience yield = taux de dividende	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	
d1		1,06	0,97	0,97	1,00	1,04	1,07	1,11	1,15	1,19	
d2		0,76	0,55	0,45	0,40	0,37	0,34	0,32	0,30	0,29	
F(d1)		0,8551	0,8342	0,8351	0,8417	0,8500	0,8587	0,8673	0,8756	0,8834	
F(d2)		0,7759	0,7076	0,6753	0,6558	0,6426	0,6329	0,6255	0,6196	0,6148	
Valeur du call (€) par unité produite	5,000	6,603	8,027	9,216	10,254	11,178	12,017	12,780	13,481	14,128	
Valeur du call sur la totalité de la production (M€)	**1,000**	**1,321**	**1,605**	**1,843**	**2,051**	**2,236**	**2,403**	**2,556**	**2,696**	**2,826**	**20,537**

3.3. Analogie entre les options réelles et les options financières

1. Analogie entre les options financières et les options réelles

Selon Amram et Kulatilaka (1999)[4], les options réelles constituent une extension de la théorie des options financières aux options sur des actifs réels, c'est-à-dire non financiers.

Comme les options sur les actifs financiers, les options réelles impliquent, selon Trigeorgis (1993)[5] des décisions discrétionnaires ou des droits d'acquérir ou d'échanger un actif à un prix connu à l'avance.

De même, selon Copeland et Antikarov (2001)[6], une option réelle est un droit et non une obligation de prendre une décision (telle que retarder un investissement, étendre, réduire ou abandonner une activité) à un prix déterminé appelé prix d'exercice, pendant une période de temps donnée correspondant à la durée de vie de l'option.

Dixit et Pindyck (2001)[7] confirment qu'une société qui a une opportunité d'investissement détient quelque chose qui ressemble à une option d'achat financière, à savoir le droit et non l'obligation d'acquérir un actif qui correspond au droit d'accès au flux de profits générés par un projet à la date de son choix, dans le futur. La réalisation de l'investissement correspond alors à l'exercice de l'option d'achat.

En fait, selon Luenberger (1998)[8], tout processus qui permet de prendre le contrôle d'une activité peut être analysé comme une série d'options réelles. Ces options opérationnelles sont souvent désignées par le terme d'options réelles pour intégrer le fait qu'elles impliquent des activités réelles par opposition aux produits purement financiers comme par exemple les options de souscription réservées aux membres de la direction d'une société (*stock options*).

Dans ce contexte, Bellalah (2003)[9] propose une table de correspondance entre les paramètres des options réelles (assimilées à des options d'investir) et ceux des options financières :

---

[4] Amram M. et Kulatilaka N., "Real Options – Managing Strategic Investment in an Uncertain World", Harvard Business School Press, Boston, MA, 1999

[5] Trigeorgis L., "Real Options and Interactions with Financial Flexibility", *Financial Management*, Autumn 1993

[6] Copeland TE. et Antikarov V., "Real Options – A Practitioner's Guide", Texere, New York, NY, 2001

[7] Dixit AK. et Pindyck RS., "The Options Approach to Capital Investment", in "Real Options and Investment under Uncertainty", ed ES. Schwarz et L. Trigeorgis, 2001

[8] Luenberger DG., "Investment Science", Oxford University Press, New York, NY

[9] Bellalah M., "Finance Moderne d'Entreprise", Seconde Edition, Economica, 2003

Tableau n°3 : correspondance entre les paramètres de l'option réelle et de l'option financière

Option réelle d'investir	Variable	Option d'achat financière
Valeur actuelle des actifs à acquérir pour réaliser le projet	S	Prix de l'actif sous-jacent
Investissement à effectuer pour réaliser le projet	E	Prix d'exercice de l'option
Période durant laquelle la décision peut être retardée	τ	Durée restant jusqu'à l'échéance de l'option
Valeur temps de l'argent	r	Taux sans risque
Mesure du risque des actifs du projet	σ	Volatilité ou écart type des rendements de l'actif sous-jacent

Quatrième partie : Options réelles stratégiques

4.1. Introduction à la notion d'option de report de l'investissement

A titre illustratif, une entreprise envisage de réaliser un investissement d'une valeur de 1 200 M€ qui génèrera chaque année un flux de trésorerie annuel, soit de 130 M€ avec une probabilité de 50%, soit de 70 M€ avec une probabilité de 50%, en fonction de l'issue de la réponse à un appel d'offres qui vient d'être lancé. Si l'investissement avait été réalisé au début de l'exercice qui se termine, le flux de trésorerie généré aurait été de 100 M€.

L'évolution des flux de trésorerie peut alors être schématisée comme suit :

Graphique n°1 : exemple d'évolution des flux de trésorerie générés par un projet

		130	130	130…
	100			
		70	70	70…
t	0	1	2	3…

Si l'entreprise a la possibilité de décaler son investissement d'un an, elle connaîtra le flux de trésorerie annuel avec certitude. Ainsi, en cas d'échec à l'appel d'offres, le flux de trésorerie annuel sera de 70 M€ et, sur la base d'un taux d'actualisation de 8%, la valeur du projet de 70/8% = 875 M€ sera inférieure à son coût de revient. Il devra donc être abandonné.

La flexibilité stratégique procurée par la possibilité de décaler l'investissement d'un an crée une valeur qui peut être valorisée à l'aide de l'approche binômiale.

Le taux sans risque est fixé à 5%.

Dans ce cas, la valeur du projet s'établit :

- En t = 0 à : $\frac{(130x50\%)+(70x50\%)}{8\%}$ = 1 250 M€.
- En t = 1 :
  - soit à $\frac{130}{8\%}$ = 1 625 M€ avec une probabilité de 50% ;
  - soit à $\frac{70}{8\%}$ = 875 M€ avec une probabilité de 50%.

Dès lors, le projet génère :

- soit une plus-value de 1 625 – 1 250 = 375 M€ qui correspond à 30% de la valeur du projet ;

- soit une plus-value de 875 – 1 250 = -375 M€ soit –30% de la valeur du projet.

La prise en compte du taux de *cash flow* (100/1 250 = 8%) permet de déterminer le rendement du projet qui s'établit :

- soit à 30% + 8% = 38% ;
- soit à -30% + 8% = -22%.

Il est alors possible de déterminer la probabilité risque-neutre p :

38%p – 22%(1-p) = 5% donc p = 45%.

Finalement, la valeur de l'option - qui correspond à la valeur actualisée au taux sans risque de l'espérance de valeur intrinsèque à l'échéance - s'établit à :

$$\frac{45\%x(1625-1200)+55\%x(875-1200)}{(1+8\%)} = 182 \text{ M€.}$$

Par conséquent, l'investissement immédiat qui conduit à renoncer à cette valeur optionnelle représente un coût d'opportunité de 182 M€. Le coût de revient global s'établit alors à 1 200 + 182 = 1 382 M€. Dans la mesure où la valeur du projet est de 1 250 M€, la VAN de ce projet s'établit alors à – 132 M€, ce qui dissuade de l'investissement immédiat.

4.2. Généralisation : le modèle de Dixit et Pindyck

Dixit et Pindyck (1994)[10] ont formalisé en temps continu la notion de temps d'attente c'est-à-dire du choix du moment optimal pour réaliser un investissement qui peut être reporté indéfiniment. Ce moment correspond à la date à laquelle le montant anticipé des flux de trésorerie futurs atteint une valeur critique.

Ils supposent que les flux de trésorerie - qui seront générés si l'investissement est réalisé - définissent un mouvement brownien géométrique. En d'autres termes :

10 Dixit A. et Pindyck R., *Investment Under Uncertainty*, Princeton University Press, 1994, chapitre 5

$dV = \alpha .V.dt + \sigma .V.dz$ [25]

où :

V = valeur actuelle des flux de trésorerie futurs, supposée positive ;
α = taux de croissance espéré des flux de trésorerie;
σ = volatilité des flux de trésorerie.

En outre, le montant I de l'investissement est, à ce stade, supposé fixe quelle que soit la date à laquelle il est réalisé.

Soit par ailleurs :

V* = valeur critique des flux de trésorerie futurs ;
μ = taux de rendement espéré de l'action qui ne verse pas de dividende et dont le cours est parfaitement corrélé à V ;
δ = taux de flux de trésorerie généré par le projet étudié.

L'hypothèse de corrélation parfaite entre l'évolution du cours de l'action et celle des flux de trésorerie du projet conduit à considérer que le taux de rendement du projet est le même que celui de l'action.

Ce rendement (μ) est la somme du taux de flux de trésorerie (δ) et du taux de plus-value (α). Ainsi :

$\mu = \alpha + \delta$ soit encore : $\delta = \mu - \alpha$. [26]

Soit F la prime de l'option d'investir à n'importe quel moment. Il s'agit d'un *call* à l'américaine sur l'actif dont le cours comptant est V, assorti d'un prix d'exercice égal à I. Si ce *call* est exercé, l'entreprise qui le détient paie I et reçoit en échange un actif qui peut être revendu pour un montant égal à V. Par conséquent, en cas d'exercice, le *call* vaut V-I c'est-à-dire sa valeur intrinsèque qui correspond à la VAN du projet. Si ce *call* est conservé, sa prime F - qui incorpore de la valeur temps - a une valeur supérieure à V- I.

Ainsi :

$F \geq V- I$, soit encore : $F + I \geq V$.

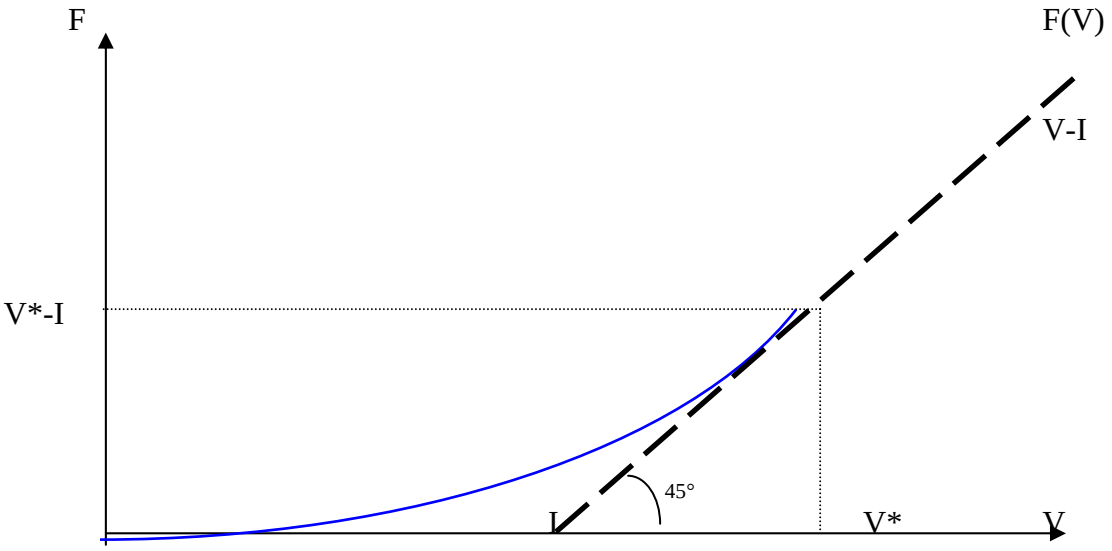
En d'autres termes, le call doit être conservé tant que le coût de revient global du projet (investissement augmenté de la prime de l'option de report) est supérieur à la valeur espérée des flux de trésorerie futurs générés par le projet.

Il peut par conséquent être exercé lorsque F = V-I c'est-à-dire au point de contact entre la courbe schématisant l'évolution de la prime F de l'option et la droite d'équation F = V-I.

L'abscisse V* de ce point de contact est la valeur critique des flux de trésorerie futurs. Par conséquent :

F(V*) = V* - I (condition aux bornes n°1, dite *value matching*)

Graphique n°2 : sensibilité de la valeur de d'une option d'attente
à la valeur des flux de trésorerie futurs



Or F $\geq$V- I. Donc, au point de contact la courbe est tangente à la droite d'équation F = V-I dont la pente est égale à 1. En d'autres termes, elle forme un angle de 45° avec l'axe des abscisses. Par conséquent :

F'(V*) = 1 (condition aux bornes n°2 dite *smooth pasting*)

En outre, si V = 0, la valeur des flux de trésorerie ne peut progresser. Par conséquent, le projet doit être abandonné et l'option a donc une valeur nulle. En d'autres termes :

F(0) = 0 (condition aux bornes n°3).

L'équation aux dérivées partielles issue du lemme d'Ito (et de la constitution d'un portefeuille d'arbitrage) pour un *call* sur une action dont le cours est S s'écrit.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS.\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}.\sigma^2 S^2.\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \text{rC}. \qquad [27]$$

Il convient alors, pour l'appliquer à l'option de report d'un projet, de remplacer :

- C par F ;
- S par V ;
- r par r-δ afin de prendre en compte le taux de flux de trésorerie du projet, assimilé au dividende versé par une action,

et de remarquer que le *call* n'a pas, ici, de dérivée partielle par rapport au temps puisque sa date d'échéance peut être reportée indéfiniment.

Dès lors :

$(r-\delta).V.\frac{\partial F}{\partial V}+\frac{1}{2}.\sigma^2V^2.\frac{\partial^2 F}{\partial V^2}$ = rF, soit encore :

$$\frac{1}{2}.\sigma^2V^2.F''(V)+(r-\delta).V.F'(V) \text{ - r.F(V) = 0} \qquad [28]$$

Il s'agit d'une équation différentielle homogène du second ordre dont les 3 conditions aux bornes sont :

F(V*) = V* - I, F'(V*) = 1 et F(0) = 0.

Cette équation est de la forme :

F''(x) + a.F'(x) + b.F(x) = 0 [29]
qui devient, en posant : F(x) = $e^{\lambda x}$:

$$\lambda^2.e^{\lambda x}+a.\lambda.e^{\lambda x}+b.e^{\lambda x}=0 \qquad [30]$$

ce qui revient à considérer que l'équation différentielle admet des solutions de la forme $e^{\lambda x}$.

En divisant par $e^{\lambda x}$, on obtient :

$$\lambda^2+a.\lambda+b.=0. \qquad [31]$$

Cette équation caractéristique est un trinôme du second degré dont les racines seront notées λ_1 et λ_2.

Dans ce cas, il est possible de déterminer A et B tels que :
F(x) = A. $e^{\lambda_1 x}$ + B. $e^{\lambda_2 x}$ [32]
en utilisant les conditions aux bornes. F est donc une combinaison linéaire de deux solutions particulières de l'équation différentielle.

Si l'on suppose désormais que l'équation aux dérivées partielles a des solutions de la forme V^{β} alors l'équation caractéristique devient :

$$\frac{1}{2}.\sigma^2V^2.\beta.(\beta-1).V^{\beta-2}+(r-\delta).V.\beta.V^{\beta-1} \text{ - r. } V^{\beta} = 0. \qquad [33]$$

Soit, en divisant tous les termes par V^{β} :

$$\frac{1}{2}.\sigma^2\beta.(\beta-1)+(r-\delta).\beta \text{ - r = 0.}$$

Finalement :

$$\frac{1}{2}.\sigma^2\beta^2+(r-\delta-\frac{1}{2}.\sigma^2).\beta \text{ - r = 0} \qquad [34]$$

Le discriminant Δ de l'équation est :

$$\Delta = (r - \delta - \frac{1}{2}.\sigma^2)^2 + 2.r.\sigma^2 \qquad [35]$$

En notant β_1 et β_2 les solutions de l'équation caractéristique :

$$\beta_1 = \frac{-\left(r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \sqrt{\Delta}}{\sigma^2} \qquad [36]$$

qui sera supposée être la solution la plus grande.

$$\beta_2 = \frac{-\left(r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2\right) - \sqrt{\Delta}}{\sigma^2}$$ qui sera supposée être la solution la plus petite.

Le produit des solutions d'un trinôme du second degré du type $ax^2 + bx + c = 0$ est égal à $\frac{c}{a}$.

Donc $\beta_1 . \beta_2 = \frac{-r}{\frac{1}{2}.\sigma^2} < 0$ donc $\beta_1 > 0$ et $\beta_2 < 0$.

Il est par ailleurs possible de démontrer que $\beta_1 > 1$.

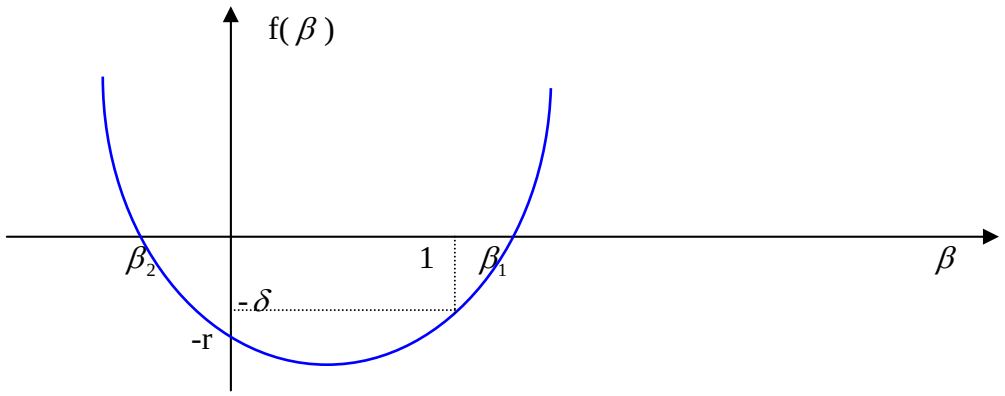
En effet, la fonction polynômiale du second degré $f(\beta) = \frac{1}{2}.\sigma^2\beta^2 + (r - \delta - \frac{1}{2}.\sigma^2).\beta$ - r est représentée graphiquement par une parabole telle que :

$\lim f(\beta) = +\infty$ quand β tend vers $\pm\infty$, donc la parabole est tournée vers le haut.

$f(0) = -r$ et $f(1) = -\delta < 0$, δ étant supposé positif.

Dans ce cas, la représentation graphique de la parabole est la suivante :

Graphique n°2 : graphe de la fonction f(β)



Le graphique montre que pour que f(1) soit négatif, il convient que $\beta_1 > 1$.

Par ailleurs, les conditions aux bornes permettent de résoudre l'équation différentielle dont la solution générale est de la forme :

$$F = A.\ V^{\beta_1} + B.\ V^{\beta_2} \qquad [37]$$

Or, par hypothèse F(0) = 0, $\beta_1 > 0$ et $\beta_2 < 0$. Il convient donc que B = 0

Par conséquent : $F = A.\ V^{\beta_1}$.
Par ailleurs, F(V*) = V* - I (condition *value matching*) et F'(V*) = 1 (condition *smooth pasting*) ; donc :

$A.\ V^{*\beta_1} = V^* - I$
et
$A.\ \beta_1 . V^{*\beta_1 - 1} = 1.$

En divisant ces 2 égalités membre à membre, on obtient :

$\frac{V^*}{\beta_1} = V^* - I$ soit $V^*(\frac{1}{\beta_1} - 1) = -I$ ou encore : $V^*(\frac{\beta_1 - 1}{\beta_1}) = I$

Finalement :

$$V^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}.I \qquad [38]$$

Et :

$$A = \frac{V^* - I}{V^{*\beta_1}} = \frac{1}{\beta_1}\left(\frac{\beta_1 - 1}{\beta_1 I}\right)^{\beta_1 - 1} \qquad [39]$$

En outre, comme $\beta_1 > 1$, $\frac{\beta_1}{1 - \beta_1} > 1$

Annexe : démonstration de la formule de Black and Scholes

On considère un call dont on cherche à exprimer la prime C.

C correspond à la valeur actualisée, en temps continu, de l'espérance de valeur intrinsèque le jour de l'échéance, dans T années. En d'autres termes :

C=. e^{-rT} E[max(0,S_T-K)] où :
S_T = cours du sous-jacent dans T années
K = prix d'exercice du call
r = taux sans risque. L'actualisation est réalisée sur cette base dans la mesure où l'option est supposée dans un univers risque-neutre.

1. Hypothèse sur l'évolution du cours du sous-jacent

S_T est supposé définir un mouvement brownien géoémétrique ce qui revient à écrire :
$dS_T=\mu S_T dt + \sigma S_T dz$ [1]
où dz = $\varepsilon\sqrt{dt}$ et ε suit une loi normale centrée réduite

Dans ce cas, $\ln S_T$ suit une loi normale ou, ce qui est équivalent, S_T suit une loi log-normale. Ainsi :

$$lnS_T \rightarrow N[lnS_0+(\mu-\sigma^2/2).T,\ \sigma\sqrt{T}\ ] \qquad [2]$$

2. Détermination de E[max(0,S-K)] dans l'hypothèse où lnS→N(m,s)

On sait que :
max(*0,S-K*) = *0* si *S<K*
max(*0,S-K*) = *S-K* si *S>K*

Par ailleurs : E[max(*0,S-K*)] = $\int_{-\infty}^{+\infty}(S-K).f(S).dS$ où *f* désigne la densité de probabilité de la loi log-normale de paramètres m et s. En d'autres termes :

$$f(x) = \frac{1}{xs\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - m)^2}{2s^2}} \qquad [3]$$

En décomposant l'intégrale :

$$\text{E[max(0,S-K)]} = \int_{-\infty}^{K} \max(S-K).f(S).dS + \int_{K}^{+\infty} \max(S-K).f(S).dS \qquad [4]$$

Or dans la première intégrale, *S<K* et dans ce cas max(*0,S-K*)=*0*. Par ailleurs, dans la seconde intégrale, *S>K* et dans ce cas, max(*0,S-K*)=*S-K*. Ainsi :

$$\text{E[max(0,S-K)]} = \int_{K}^{+\infty}(S-K).f(S).dS$$

Dans la mesure où S suit une loi log-normale de paramètres m et s, E(S)= $e^{m+\frac{s^2}{2}}$, soit :

$$m = \ln E(S) - \frac{s^2}{2} \qquad [5]$$

où s est l'écart type de la variable aléatoire S.
Posons le changement de variable[11] :

$u = \frac{\ln S - m}{s}$. Dans la mesure où m désigne l'espérance de lnS et s désigne son écart type, on peut en déduire que u suit une loi normale centrée réduite. En d'autres termes : $u \to N(0,1)$.

Ainsi, si h est la densité de probabilité de la variable u, alors : $h(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$

Pa r ailleurs, on peut déduire de l'expression de u :

$S = \phi(u) = e^{us+m}$. Donc : $\phi'(u) = se^{us+m}$ et $\phi^{-1}(u) = \frac{\ln u - m}{s}$.

Ceci permet d'écrire, en revenant à l'intégrale [5] :

$$\text{E[max(0,S-K)]} = \int_{\frac{\ln K - m}{s}}^{+\infty} (e^{us+m} - K).f(e^{us+m}).se^{us+m} du \qquad [6]$$

Or, en utilisant le résultat [3] relatif à la définition de f :

$$f(e^{us+m}) = \frac{1}{e^{us+m} s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln e^{us+m} - m)^2}{2s^2}} = \frac{1}{e^{us+m} s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(us+m-m)^2}{2s^2}} = \frac{1}{e^{us+m} s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(us+m-m)^2}{2s^2}}$$

Finalement :

$$f(e^{us+m}) = \frac{1}{e^{us+m} s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} = = \frac{1}{e^{us+m} s} h(u) \qquad [7]$$

En réinjectant le résultat [7] dans [6] :

$$\text{E[max(0,S-K)]} = \int_{\frac{\ln K - m}{s}}^{+\infty} (e^{us+m} - K).\frac{1}{se^{us+m}}.h(u).se^{us+m} du$$

Soit encore :

$$\text{E[max(0,S-K)]} = \int_{\frac{\ln K - m}{s}}^{+\infty} (e^{us+m} - K).h(u) du \qquad [8]$$

En développant la formule [8] :

$$\text{E[max(0,S-K)]} = \int_{\frac{\ln K - m}{s}}^{+\infty} e^{us+m}.h(u) du \text{ -K.} \int_{\frac{\ln K - m}{s}}^{+\infty} h(u) du \qquad [9]$$

Or :

$$e^{us+m}.h(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{us+m-\frac{u^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-u^2+2su+2m}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(u-s)^2+s^2+2m}{2}}$$

Ou encore :

$$e^{us+m}.h(u) = \frac{e^{m+\frac{s^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(u-s)^2}{2}} = e^{m+\frac{s^2}{2}}.h(u-s) \qquad [10]$$

---

[11] Rappel sur le changement de variable : soit I = $\int_a^b f(x)dx$ et soit $x = \phi(u)$.

Dans ce cas : I= $\int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f[\phi(u)].\phi'(u)du$

En réinjectant [10] dans [9] :

E[max(0,S-K)] = $e^{m+\frac{s^2}{2}} \int_{\frac{\ln K-m}{s}}^{+\infty} h(u-s)du$ -K. $\int_{\frac{\ln K-m}{s}}^{+\infty} h(u)du$ [11]

Or, *h* étant une densité de probabilité, on peut écrire :

$\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)du = \int_{-\infty}^{\frac{\ln K-m}{s}} h(u)du \ \int_{\frac{\ln K-m}{s}}^{+\infty} h(u)du$ =1.

Donc :

$\int_{\frac{\ln K-m}{s}}^{+\infty} h(u)du$ = 1- $\int_{-\infty}^{\frac{\ln K-m}{s}} h(u)du$ = 1 - $\Phi(\frac{\ln K-m}{s}) = \Phi(\frac{-\ln K+m}{s})$

où $\Phi(x)$ désigne l'image du réel *x* par la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

Mais, d'après [5] : $m = \ln E(S) - \frac{s^2}{2}$. Donc :

$$\int_{\frac{\ln K-m}{s}}^{+\infty} h(u)du = \Phi(\frac{-\ln K + \ln E(S) - \frac{s^2}{2}}{s}) = \Phi(\frac{\ln \frac{E(S)}{K} - \frac{s^2}{2}}{s}) = \qquad [12]$$

Par ailleurs, pour calculer $\int_{\frac{\ln K-m}{s}}^{+\infty} h(u-s)du$, posons le changement de variable : *v*=*u*-*s*, donc :

$u = \psi(v) = v + s$ ce qui implique que $\psi'(v) = 1$ et $\psi^{-1}(v) = v - s$

Ainsi :

$$\int_{\frac{\ln K-m}{s}}^{+\infty} h(u-s)du = \int_{\frac{\ln K-m}{s}-s}^{+\infty} h(v)dv = \Phi(\frac{-\ln K+m}{s} + s) = \Phi(\frac{-\ln K + \ln E(S) - \frac{s^2}{2}}{s} + s)$$

soit encore :

$$\int_{\frac{\ln K-m}{s}}^{+\infty} h(u-s)du = \Phi(\frac{\ln \frac{E(S)}{K} - \frac{s^2}{2}}{s} + s) = \Phi(\frac{\ln \frac{E(S)}{K} + \frac{s^2}{2}}{s}) \qquad [13]$$

Ainsi, en réinjectant [12] et [13] dans [11] :

$$\text{E[max(0,S-K)]} = e^{m+\frac{s^2}{2}} \Phi(\frac{\ln \frac{E(S)}{K} + \frac{s^2}{2}}{s}) \text{-K. } \Phi(\frac{\ln \frac{E(S)}{K} - \frac{s^2}{2}}{s}) \qquad [14]$$

$$= e^{\ln E(S) - \frac{s^2}{2} + \frac{s^2}{2}} \Phi(\frac{\ln \frac{E(S)}{K} + \frac{s^2}{2}}{s}) \text{ - K. } \Phi(\frac{\ln \frac{E(S)}{K} - \frac{s^2}{2}}{s})$$

$$= \text{E(S). } \Phi(\frac{\ln \frac{E(S)}{K} + \frac{s^2}{2}}{s}) \text{ - K } \Phi(\frac{\ln \frac{E(S)}{K} - \frac{s^2}{2}}{s})$$

3. Détermination de la formule de Black & Scholes

C= e^{-rT} .E[max(0,S_T-K)].
Dès lors :

$$C= e^{-rT} . [E(S_T).\ \Phi(\frac{\ln\frac{E(S_T)}{K}+\frac{s^2}{2}}{s}) - K\ \Phi(\frac{\ln\frac{E(S_T)}{K}-\frac{s^2}{2}}{s})] \qquad [15]$$

Or si S_T suit une loi log-normale de paramètres *m* et *s* alors :

$$E(S_T) = e^{m+\frac{s^2}{2}}$$

et ici, d'après [2] :

$$m = \ln S_0 + (\mu + \frac{\sigma^2}{2}).T$$

et :

$$s = \sigma\sqrt{T}\ .$$

Donc :

$$E(S_T) = e^{\ln S_0 + (\mu+\frac{\sigma^2}{2}).T + \frac{\sigma^2 T}{2}} = S_0 e^{\mu T}$$

En se plaçant en environnement risque neutre : $\mu = r$. Dans ce cas :

$$E(S_T) = S_0.e^{rT} \qquad [16]$$

En réinjectant [16] dans [15] et en utilisant la relation $s = \sigma\sqrt{T}$:

$$C= e^{-rT} [\ S_0.e^{rT}\ \Phi(\frac{\ln\frac{S_0 e^{rT}}{K}+\frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}) - K\ \Phi(\frac{\ln\frac{S_0 e^{rT}}{K}-\frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}})]$$

$$C= S_0.\ \Phi(\frac{\ln\frac{S_0}{K}+(r+\frac{\sigma^2}{2}).T}{\sigma\sqrt{T}}) - K e^{-rT}\ \Phi(\frac{\ln\frac{S_0}{K}+(r-\frac{\sigma^2}{2}).T}{\sigma\sqrt{T}})]$$

Soit :

$$d_2 = \frac{\ln\frac{S_0}{K}+(r+\frac{\sigma^2}{2}).T}{\sigma\sqrt{T}}$$

et :

$$d_2 = \frac{\ln\frac{S_0}{K}+(r-\frac{\sigma^2}{2}).T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln\frac{S_0}{K}+(r+\frac{\sigma^2}{2}).T-\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln\frac{S_0}{K}+(r+\frac{\sigma^2}{2}).T}{\sigma\sqrt{T}} - \sigma\sqrt{T}$$

Finalement :

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}\ .$$

Donc :

$$C= S_0.\ \Phi(d_1) - K e^{-rT}\ \Phi(d_2)]$$